MICHEL RENAUD

PHYSIQUE GÉNÉRALE

2

THERMODYNAMIQUE
OPTIQUE

MICHEL RENAUD
DOMINIQUE SILHOUETTE
ROGER FOURME

PHYSIQUE GÉNÉRALE

2

THERMODYNAMIQUE
OPTIQUE

1

CHOCS ET THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

CHOCS

1. GÉNÉRALITÉS

Sous le nom de choc (ou collision), on désigne le processus d'interaction de particules, qu'*il y ait ou non contact* entre elles. Ces interactions ne sont importantes qu'à *courte distance;* d'autre part les vitesses des particules étant généralement grandes, la *durée* d'un choc est *faible* et on peut supposer que les forces, autres que leur interaction mutuelle, ont un effet négligeable; autrement dit, *pendant le choc, les particules constituent un système isolé.* On peut ainsi représenter un choc par le schéma de la figure 1.1.

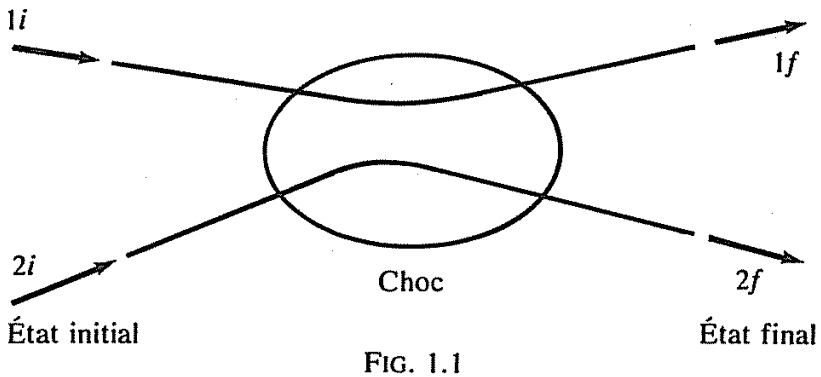


FIG. 1.1

Il existe, si on peut dire, des « chocs à une particule »; on préfère les appeler *désintégrations* (neutron, par exemple). Bien qu'ils soient a priori concevables, les chocs de trois particules (ou plus) ont une probabilité de se réaliser bien plus faible que les chocs de deux particules. On examinera donc plus particulièrement le choc de deux particules.

Le choc peut résulter en une simple *diffusion,* les particules finales étant alors identiques aux particules initiales : par exemple, un électron quasi libre, ayant une vitesse initiale $\vec{v}_i$ se déplace selon une direction (D_1); s'il passe au voisinage d'un proton H^+, il y a diffusion (fig. 1.2), c'est-à-dire inflexion de la trajectoire de l'électron qui, ensuite, se confond avec la droite (D_2). La microscopie électronique utilise la diffusion d'électrons rapides, de même que la diffusion des électrons lents sert à l'étude des surfaces.

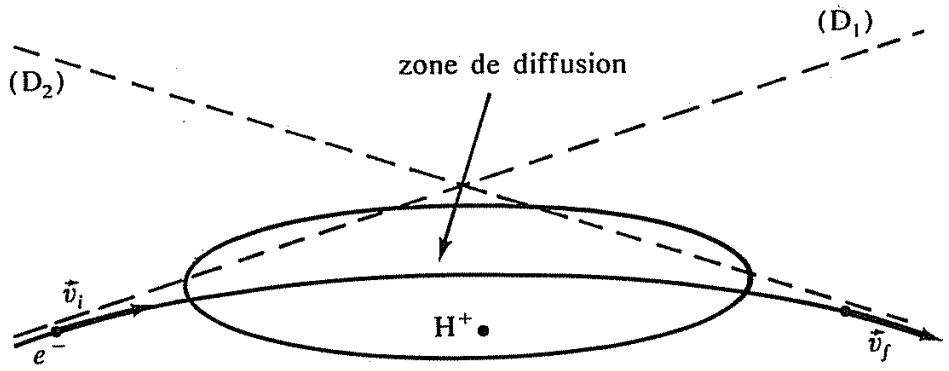


FIG. 1.2

État initial : avant le choc, les particules sont soumises aux forces extérieures; leur interaction est négligeable.
Choc : les forces extérieures sont négligeables; seule intervient leur interaction.
État final : après le choc, les particules finales sont aussi soumises aux forces extérieures; leur interaction est négligeable.

Mais il peut aussi y avoir *réaction,* c'est le cas des réactions chimiques, le choc de A et BC donnant par exemple AB et C; le nombre des particules finales peut d'ailleurs être nettement supérieur à deux.

Enfin, dans une *réaction de capture,* les particules initiales s'unissent pour former une seule particule finale (c'est le cas, par exemple, d'une balle de fusil qui pénètre dans un sac de sable).

La physique des particules utilise, pour leur étude, les chocs entre particules élémentaires créées et accélérées dans les *accélérateurs,* éventuellement accumulées, pour augmenter leur nombre, dans les *anneaux de stockage,* puis détectées après le choc par des détecteurs, qui sont souvent des *chambres à bulles.*

Dans les réacteurs nucléaires, on utilise la *fission* de certains noyaux par des neutrons de faible énergie; les neutrons produits par la réaction, ralentis par des chocs avec des atomes légers contenus dans le *modérateur* (eau ordinaire H_2O ou eau lourde D_2O), peuvent alors provoquer de nouvelles fissions : il y a « réaction en chaîne ».

Les chocs interviennent aussi, comme on l'a vu, dans l'étude des fluides : ils permettent d'expliquer la viscosité, la conduction thermique, la diffusion (voir en particulier le chapitre 7). Dans les fluides en équilibre, ils sont responsables des propriétés macroscopiques, telles que la pression.

2. CHOCS ET LOIS DE CONSERVATION. LES BILANS

Soit m_1 et m_2 les masses des particules initiales, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ leurs vitesses. Considérons le cas de deux particules finales $(m'_1, m'_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$; les résultats donnés ci-dessous pourraient facilement être étendus à des problèmes plus complexes.

Le système étant momentanément isolé, il y a conservation :

1° de la quantité de mouvement totale,

2° de l'énergie totale,

3° du moment cinétique total.

Cette dernière condition, souvent oubliée, est peu commode d'écriture et ne sera pas utilisée dans la suite. Elle est néanmoins responsable du fait que si deux particules de charges q_1 et q_2, dont les vitesses initiales $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires (fig. 1.3), se choquent par une diffusion de type coulombien $\left(F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\right)$, alors après le choc les trajectoires des particules sont contenues dans le même plan qu'avant le choc.

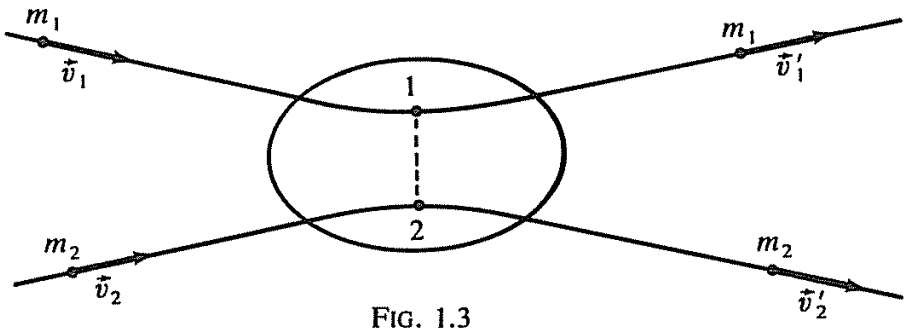


FIG. 1.3

— Pour la quantité de mouvement totale conservée, on obtient :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

ou encore :

$$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m'_1\vec{v}'_1 + m'_2\vec{v}'_2.} \qquad (1.1)$$

— Le bilan d'énergie doit prendre en compte les énergies cinétiques E_c des particules, mais aussi leurs énergies potentielles *internes* E_p ; l'énergie *totale* étant conservée, on a :

$$E_{c,1} + E_{c,2} + E_{p,1} + E_{p,2} = E'_{c,1} + E'_{c,2} + E'_{p,1} + E''_{p,2}. \qquad (1.2)$$

Un exemple simple permettra d'illustrer l'importance de l'énergie potentielle interne : dans un premier choc, une balle (1) vient frapper un bloc d'acier (2) de 1 kg; dans un second choc, la même balle vient frapper le détonateur d'une mine (2) de 1 kg; l'énergie cinétique des particules finales sera très supérieure dans le second cas, à cause de $E_{p,2}$!!!

On pose souvent :

$$\boxed{Q = (E_{p,1} + E_{p,2}) - (E'_{p,1} + E'_{p,2}).} \qquad (1.3)$$

— Si $Q = 0$, l'énergie cinétique se conserve et le choc est dit *élastique.*
— Si $Q \neq 0$, le choc est *inélastique.*

• Pour $Q > 0$, l'énergie cinétique s'accroît dans le choc aux dépens de l'énergie potentielle, le choc est *exoénergétique.*

• Pour $Q < 0$, les particules finales emmagasinent une partie de l'énergie disponible initiale (réaction *endoénergétique*).

D'autre part, la théorie de la relativité a apporté la notion nouvelle d'*équivalence entre masse et énergie;* on doit en tenir compte dans le calcul de Q, en incluant dans chaque terme E_p le terme de masse mc^2 (par exemple m_1c^2 dans $E_{p,1}$) : *cette correction est fondamentale en ce qui concerne les réactions nucléaires* pour lesquelles Q dépasse largement le MeV; Q restant de l'ordre de l'électron-volt dans les réactions chimiques «ordinaires», on pourra alors s'en dispenser.

La conservation de l'énergie totale du système isolé (1.2) conduit finalement au bilan énergétique :

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1'v_1'^2+\frac{1}{2}m_2'v_2'^2-Q.} \qquad (1.4)$$

Données et inconnues. Les particules initiales et leurs vitesses sont supposées connues, de même que la nature des particules finales. Les quantités données sont ainsi : m_1, m_2, $\vec{v}_1$ (3 composantes), $\vec{v}_2$ (3 composantes), m_1', m_2', Q. *Six sont inconnues :* $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$. Ne disposant que de *quatre équations,* le problème n'est pas soluble : il le devient moyennant *deux conditions supplémentaires* sur les composantes des vitesses finales.

3. EXEMPLES DE CHOCS ÉLASTIQUES

3.1 Le choc de plein fouet

Dans ce type de choc, représenté sur la figure 1.4, on suppose que :

$$v_{1y}' = v_{1z}' = v_{2y}' = v_{2z}' = 0,$$
$$m_1' = m_1,\ m_2' = m_2.$$

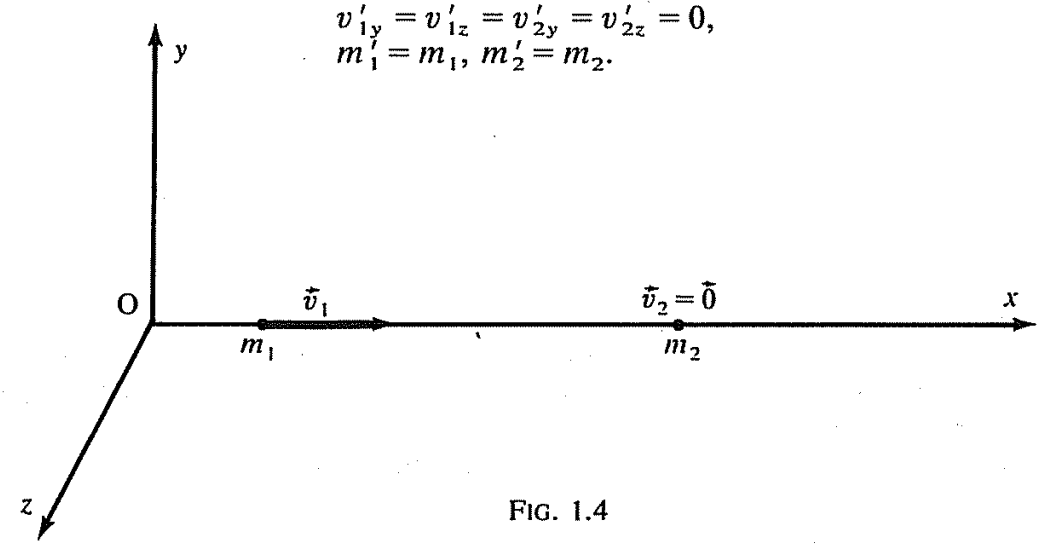


FIG. 1.4

Autrement dit, $Q = 0$ et pour chaque vitesse, on a : $\|\vec{v}\| = |v_x|$. Les équations (1.1 et 4) prennent alors la forme :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \text{ou} \quad m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2),$$

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_2'^2}{2},$$

ou :
$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2),$$

soit, en divisant membre à membre :

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2.$$

On en déduit le système :

$$v_1' - v_2' = v_2 - v_1, \quad m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

dont la solution s'écrit :

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2}.$$

Examinons quelques applications de ce résultat :

— *Le «carreau» à la pétanque :* $v_2 = 0$ et $m_1 = m_2$; d'où $v_1' = 0$ et $v_2' = v_1$. La boule lancée chasse la boule immobile et prend sa place.

— *Modérateur de réacteur nucléaire :* il y a choc entre un neutron (1) de grande vitesse v_1 et un atome (2) presque immobile. Puisque $v_1 \gg v_2$:

$$v_1' \sim \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v_2' \sim \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Le neutron est d'autant mieux ralenti — c'est-à-dire v_1' d'autant plus petit — que le rapport $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ est plus faible; ce rapport est très voisin de 0 pour le proton, il vaut 1/3 pour le deutérium. Ce calcul simple, qui ne tient pas compte du fait que le proton ou le deutérium est lié à une molécule, permet néanmoins de comprendre pourquoi on utilise des atomes légers pour «modérer» les neutrons.

— *Choc normal* d'une boule (d'un atome) sur une paroi : celle-ci peut être considérée comme une particule de masse $m_2 \gg m_1$ et de vitesse v_2 nulle. On obtient alors $v_1' \sim -v_1$ et $v_2' \sim 0$; la boule rebondit sur la paroi en changeant simplement le sens de sa vitesse initiale.

3.2 Choc oblique sur une paroi

Nous avons reporté sur la figure 1.5 a, les résultats précédents d'une collision élastique normale sur une paroi.

Si la boule venait frapper la paroi sous incidence rasante, sa vitesse ne serait pas affectée par le choc (fig. 1.5 b).

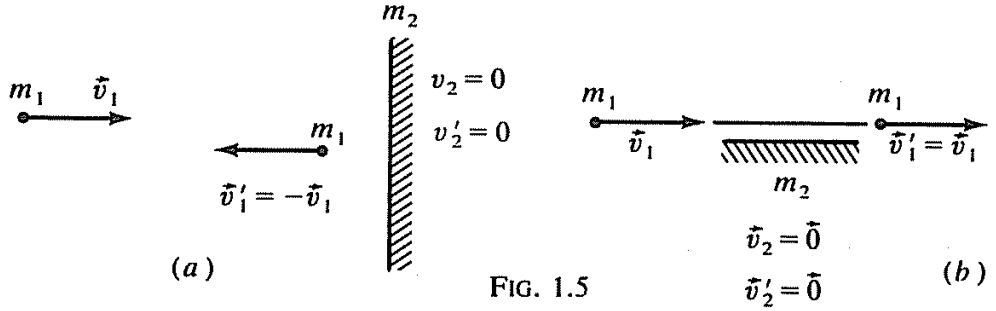


FIG. 1.5

On peut rassembler ces résultats pour le *choc oblique* (fig. 1.6) : $\vec{v}_T$ ne change pas, alors que $\vec{v}_N$ change de signe. Il y a *réflexion* comme en optique : $\theta' = -\theta$.

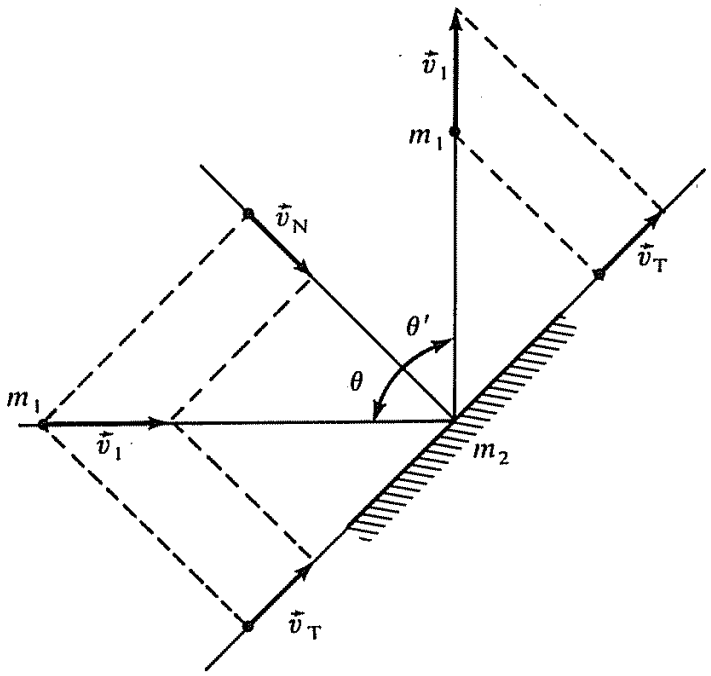


FIG. 1.6

Remarque. On note que, pour la boule, sa variation de quantité de mouvement vaut :

$$\Delta(m_1\vec{v}) = m_1(-\vec{v}_N + \vec{v}_T) - m_1(\vec{v}_N + \vec{v}_T) = -2m_1\vec{v}_N.$$

Puisque la quantité de mouvement totale se conserve :

$\Delta\vec{p}$(paroi) $= 2m_1\vec{v}_N$ (néanmoins la paroi reste immobile car $m_2 \gg m_1$).

4. EXEMPLES DE CHOCS INÉLASTIQUES

Nous citerons sans calcul quelques réactions importantes.

1° *Dans les réacteurs nucléaires* se produit la réaction de fission suivante :

$$\text{n(neutron)} + \text{noyau fissile} \longrightarrow \underset{80 \text{ à } 150}{\text{2 noyaux de masse}} + 3\,\text{n}.$$
$$(^{235}\text{U})$$

L'énergie libérée par la réaction et d'autres réactions subséquentes (de l'ordre de 200 MeV par atome d'uranium 235) est communiquée sous forme d'énergie cinétique aux produits de la réaction. Ceux-ci la cèdent ensuite, en le chauffant, au fluide primaire de refroidissement.

L'uranium 235 peut être remplacé par l'uranium 233 ou le plutonium 239; ces éléments, qui n'existent pas dans la nature, sont produits dans les réacteurs nucléaires par irradiation neutronique respectivement du thorium 232 et de l'uranium 238.

Un réacteur est donc apte à régénérer du combustible nucléaire, et même à en surrégénérer, c'est-à-dire à en produire plus qu'il n'en consomme, aux dépens des éléments naturels « fertiles », relativement abondants ^{232}Th et ^{238}U.

2° On sait que des efforts importants sont consacrés à la *fusion nucléaire;* on peut citer, parmi les réactions possibles : deutérium + tritium ⟶ hélium + neutron, le neutron étant produit avec une énergie cinétique de 14 MeV, résultant de la perte de masse. A titre de comparaison, on rappelle la valeur de l'énergie de liaison de la molécule H_2 : 4,3 eV.

3° Enfin, dans le domaine médical, les chocs inélastiques sont responsables des effets, parfois bienfaisants, parfois nocifs, des radiations; il peut y avoir ionisation ou même rupture de liaisons moléculaires.

THÉORIE CINÉTIQUE DU GAZ PARFAIT

5. LE MODÈLE MICROSCOPIQUE DU GAZ PARFAIT

On peut rendre compte de nombreuses propriétés des gaz en équilibre par le modèle suivant, pourtant très rudimentaire :

— un volume macroscopique de gaz est constitué d'un très grand nombre de molécules;

— celles-ci, de dimensions négligeables, ne subissent aucune force, sauf pendant les chocs élastiques et de très faible durée;

— à cause des chocs, les mouvements des molécules sont totalement désordonnés.

Pour « raffiner » ce modèle ou encore pour étudier les propriétés hors de l'équilibre, il faut introduire de nouvelles notions; on se contentera ici d'en mentionner deux, utilisées au chapitre 7 :

— chaque molécule se présente comme une cible (mobile); la surface de la « cible » est sa *« section efficace »;*

— *le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs.*

6. DISTRIBUTION SPATIALE DES VITESSES MOLÉCULAIRES ET VITESSE QUADRATIQUE MOYENNE.

Examinons le comportement des vitesses des N molécules de l'échantillon de gaz à un instant donné. Il est commode pour cela (fig. 1.7) de porter à partir de l'origine O d'un repère (O, v_x, v_y, v_z) des vecteurs

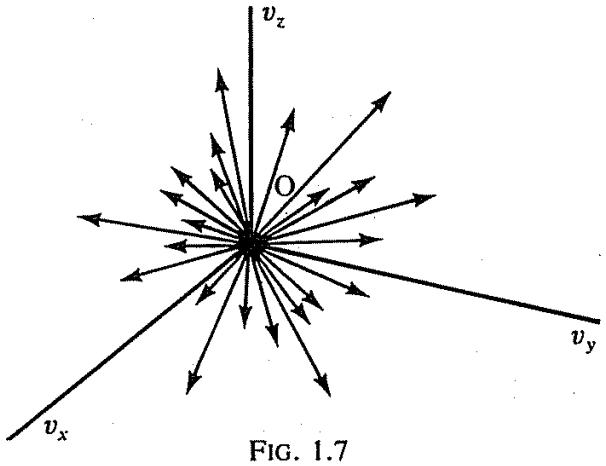


FIG. 1.7

égaux aux vecteurs-vitesses $\vec{v}_i$ de chaque molécule $i (1 \leqslant i \leqslant N)$. Les extrémités des vecteurs obtenus forment un « essaim » très serré; bien que mouvant, à cause des chocs qui produisent des échanges de vitesses, cet essaim garde sensiblement la même forme. Celle-ci est sphérique, car aucune direction n'est privilégiée (si on néglige l'influence de la pesanteur); très serrés autour de $O\left(\|\vec{v}\| \text{ faible}\right)$, les points deviennent plus clairsemés quand on s'écarte de $O\left(\|\vec{v}\| \text{ grand}\right)$.

On peut déduire quelques conséquences de cette description.

1° La moyenne des vitesses $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i$, est nulle. En effet, il est toujours possible, à cause du très grand nombre de molécules, de grouper leurs vitesses par paires, i et j, telles que $\vec{v}_i + \vec{v}_j \sim \vec{0}$; $\langle \vec{v} \rangle$ étant nulle, ses composantes $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$, $\langle v_z \rangle$ le sont également.

On peut aussi remarquer que $\sum_i m\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$ représente la quantité de mouvement $\vec{P}$ de tout l'échantillon de gaz : si on observe celui-ci dans un repère où il est immobile, $\vec{P} = \vec{0}$.

2° On calcule : $\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i^2$. Cette quantité *scalaire,* jouant un rôle très important en théorie cinétique, on pose :

$$\boxed{v_q = \langle \vec{v}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i^2};} \qquad (1.5)$$

v_q est la *vitesse quadratique moyenne* du gaz. Les trois directions x, y, z de $\mathcal{E}$ étant équivalentes pour cet échantillon, on a de plus :

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} v_q^2. \qquad (1.6)$$

3° Enfin, si l'on désigne par e_c^t l'énergie cinétique de *translation* d'une molécule et par E_c^t l'énergie de translation totale, on a :

$$\langle e_c^t \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_q^2, \tag{1.7}$$

et :

$$\langle E_c^t \rangle = N \langle e_c^t \rangle = \frac{1}{2} N m v_q^2. \tag{1.8}$$

7. CALCUL DE LA PRESSION

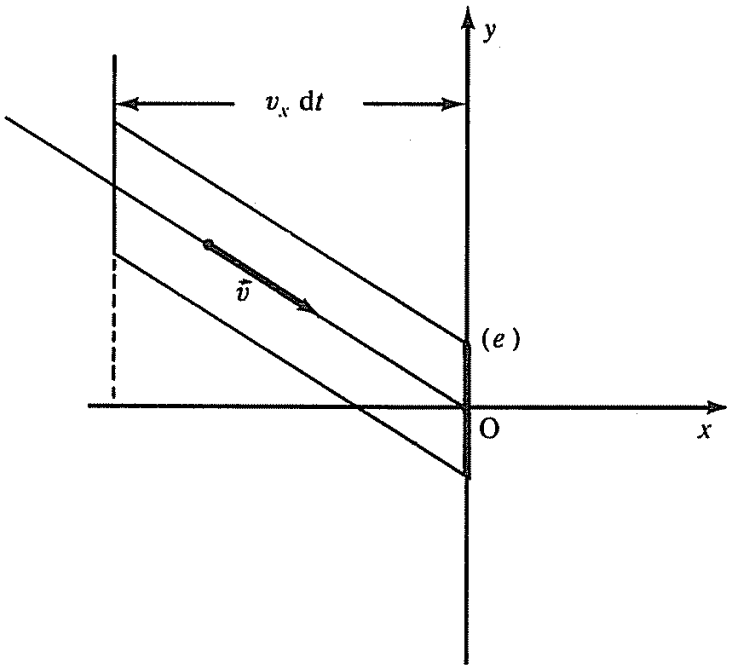


FIG. 1.8

Considérons un élément plan (e) d'aire S = 1 (fig. 1.8), qui peut être soit un élément de paroi, soit un élément placé dans le gaz (dans ce dernier cas, le calcul, qui va suivre, de la pression s'applique évidemment à chacune des faces).

Soit une molécule qui vient frapper (e); le choc étant élastique, sa quantité de mouvement passe de (mv_x, mv_y, 0) avant le choc à ($-mv_x$, mv_y, 0) après. Puisqu'il y a conservation de la quantité totale de mouvement, (e) reçoit la quantité de mouvement ($2mv_x$, 0, 0) (voir la remarque du paragraphe 3.2).

Comptons maintenant les molécules *de même vitesse* $\vec{v}$ qui viennent frapper (e) pendant le temps dt : elles *doivent* être contenues initialement dans un cylindre de base (e), de génératrices parallèles à $\vec{v}$, de *longueur* $\|\vec{v}\|\,dt$; sa hauteur étant $v_x\,dt$, le volume de ce cylindre est : $Sv_x\,dt = v_x\,dt$. Soit V le volume total du gaz; il y a, par unité de volume,

N/V molécules. Le cylindre considéré contient donc $\frac{N}{V} v_x \, dt$ molécules qui cèdent chacune à (e) la quantité de mouvement $(2mv_x, 0, 0)$; (e) reçoit de ces molécules $\left(2m \frac{N}{V} v_x^2 \, dt, 0, 0\right)$.

Il faut enfin tenir compte de toutes les valeurs possibles de $\vec{v}$ donc de v_x, c'est-à-dire $0 \leqslant v_x < +\infty$; (e) reçoit donc, au total :

$$d\vec{p} = \left(2m \frac{N}{V} \sum_{(v_x>0)} v_x^2 \, dt, 0, 0\right).$$

Or, $d\vec{p} = \dot{\vec{p}} \, dt = \vec{F} dt$: la force $\vec{F}$ de composantes $\left(2m \frac{N}{V} \sum_{(v_x>0)} v_x^2, 0, 0\right)$ est parallèle à Ox et normale à (e) [comme on l'avait signalé au paragraphe 2.1 du chapitre 7 (t. 1)]; puisque $S = 1$, elle est aussi égale à *la pression p exercée par le gaz sur* (e).

Comme, par raison de symétrie, $\sum_{(v_x>0)} v_x^2 = \sum_{(v_x<0)} v_x^2$, on a aussi :

$$\sum_{(v_x>0)} v_x^2 = \frac{1}{2} \sum v_x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_q^2}{3}\right)$$

d'après (1.6), d'où :

$$F = p = 2m \frac{N}{V} \sum_{(v_x>0)} v_x^2 = \frac{2}{3V} N \left(\frac{1}{2} m v_q^2\right).$$

On obtient ainsi, compte tenu de (1.7 et 8), le résultat :

$$\boxed{pV = \frac{1}{3} N m v_q^2 = \frac{2}{3} N \langle e_c^t \rangle = \frac{2}{3} \langle E_c^t \rangle.} \qquad (1.9)$$

8. CONSÉQUENCES

Nous verrons au chapitre 2 que le gaz parfait vérifie la loi expérimentale : $pV = \nu RT$ où ν est le nombre de moles et T la température absolue; le coefficient R est la *constante des gaz parfaits*. En posant $N = \nu N_A$, N_A désignant le nombre de molécules par mole, appelé encore *nombre d'Avogadro,* on obtient par identification :

$$\boxed{\langle E_c^t \rangle = \nu \left(\frac{3}{2} RT\right), \quad \langle e_c^t \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.} \qquad (1.10)$$

Le rapport $k = \frac{R}{N_A}$ est appelé *constante de Boltzmann* ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ joule/degré). Finalement de (1.7 et 10), il vient :

$$\boxed{v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.} \qquad (1.11)$$

Cette formule a été vérifiée expérimentalement; pour être plus précis, on a mesuré, grâce à un sélecteur de vitesse, le nombre de molécules s'échappant d'une enceinte par unité de temps et ayant une vitesse comprise entre v_x et $v_x + \Delta v_x$, v_y et v_z étant fixées (fig. 1.9).

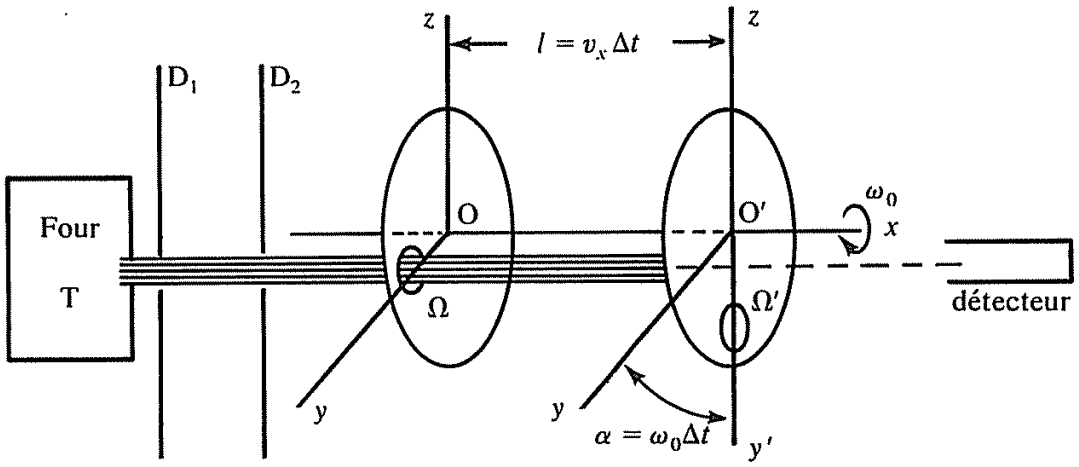


FIG. 1.9

Le fonctionnement d'un tel sélecteur est simple : il est constitué de deux disques distants de l et tournant à la même vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe OO'. Par construction, cet axe est parallèle à un faisceau atomique ou moléculaire de vapeur s'échappant d'un four maintenu à la température T et mis en forme par deux diaphragmes D_1 et D_2. A l'instant t le trou Ω du disque O laisse passer n molécules de vitesse v_x telles que $0 < v_x < \infty$. A l'instant ultérieur $(t + \Delta t)$, le disque O' se trouve dans la même situation : si le décalage angulaire entre les deux disques est mesuré par $\alpha = \omega_0 \Delta t$, seules les Δn molécules, ayant durant le temps Δt parcouru la distance l, passeront à travers le disque et atteindront le détecteur : leur vitesse sera (à Δv_x près) : $v_x = l/\Delta t$. La mesure de α donne Δt et celle de l conduit à v_x ; Δv_x est naturellement lié au diamètre du trou Ω'. En faisant varier ω_0, on modifie Δt et on adapte ainsi le sélecteur à toutes les vitesses v_x.

Les résultats obtenus (Δn molécules par tour, de vitesse comprise entre v_x et $v_x + \Delta v_x$) permettent de construire la distribution expérimentale des vitesses et de calculer v_q. Ils sont conformes à la théorie. De plus, partant de (1.11), ils permettent, connaissant v_q, T, m, d'en déduire k et N_A si R est connu par ailleurs.

Citons quelques ordres de grandeur : à la température ordinaire (T = 300 K ou 27 °C), $v_q \sim 1\,800$ m/s pour l'hydrogène moléculaire H_2, ~ 180 m/s pour le mercure (gaz monoatomique). Notons que, d'après (1.10), $\langle e_c^t \rangle$ est indépendante de m et vaut à la même température $25 \cdot 10^{-3}$ eV $\sim 4 \cdot 10^{-21}$ joule.

Remarques.

- L'association « énergie moyenne-température » est communément employée dans le langage courant : injectée dans un gaz, une particule de haute énergie se « thermalise », c'est-à-dire que son énergie diminue par chocs successifs jusqu'à atteindre l'énergie cinétique moyenne du gaz (cas des neutrons dans un réacteur).
- En utilisant le début du calcul du paragraphe 7, on peut obtenir le nombre de particules qui frappent un élément (e) par unité de temps, soit $\frac{v_q}{\sqrt{6\pi}} \frac{N}{V}$. Ce nombre est proportionnel à v_q et au nombre N/V de molécules par unité de volume.

2

THERMOMÉTRIE ET ÉCHELLES DE TEMPÉRATURE LE GAZ PARFAIT

1. INTRODUCTION

Pour décrire l'état physique d'un corps, il faut utiliser un certain nombre de paramètres : masse, température, pression, volume, forme, couleur, polarisation électrique, polarisation magnétique, tension superficielle, etc. Or, l'expérience montre que certains d'entre eux peuvent être liés par une ou plusieurs relations, dites *équations d'état*. Dans le cas des gaz, ces paramètres se réduisent aux quatre premiers, liés par une seule équation d'état, et celle-ci devient particulièrement simple pour le gaz parfait, modèle le plus élémentaire d'un gaz réel.

Les propriétés de ce gaz parfait sont donc fondamentales dans l'approche de celles des corps réels : aussi les examinerons-nous en détail dans la deuxième partie de ce chapitre. Auparavant, bien qu'il soit inutile d'insister sur l'importance de la température d'un corps, les notions naturelles de « chaud » et « froid » doivent être précisées pour faire de la température une grandeur mesurable : cela nous conduit, dans une première partie, à étudier quelques moyens de mesure de la température et à la définition des échelles de température usuelles.

THERMOMÉTRIE ET ÉCHELLES DE TEMPÉRATURE

2. LA TEMPÉRATURE, GRANDEUR MESURABLE

2.1 Principes

Dans notre expérience courante, la notion de température est liée à celle de *transfert de chaleur* et d'*équilibre thermique :* si on met deux corps en contact, l'un A « chaud », l'autre B « froid », en les isolant du monde

extérieur, ils atteignent au bout d'un certain temps la même température, intermédiaire entre celle de A et celle de B. On dit qu'il y a eu transfert de chaleur du corps le plus « chaud » vers le corps le plus « froid » et que l'ensemble a atteint un équilibre thermique (l'origine de ces concepts remonte certainement à celle de notre espèce; la seule différence réside dans la notion de chaleur, formulée au XIX^{e} siècle).

L'impression sensorielle de température doit évidemment être précisée pour en faire une grandeur mesurable. On prend pour cela une grandeur qui varie notablement avec la température. Par exemple, on utilise actuellement les *thermistances,* petits barreaux de silicium dont la résistance dépend beaucoup de la température, celle-ci pouvant notamment chuter — à titre indicatif — de plusieurs $k\Omega$ à froid à quelques ohms à chaud.

A l'aide de cette thermistance, on peut mesurer la température de deux manières; l'une d'elle consiste à exprimer directement sa valeur par celle de la résistance de la thermistance, 123 Ω par exemple; mais, de cette façon, si on utilise une autre grandeur, une autre thermistance ou un thermocouple, la même température sera mesurée par des nombres différents, 88 Ω ou 4,3 millivolts, par exemple.

On conçoit sans peine les difficultés qui résulteraient de la coexistence d'échelles de mesure différentes. Aussi, mesure-t-on la température de manière indirecte. L'ensemble de mesure appelé *thermomètre* est étalonné par rapport à une *échelle de référence* qui sera définie plus loin : la courbe d'étalonnage (fig. 2.1) indiquant alors (par exemple) que 123 Ω correspond à 92 °C, ce résultat est indépendant du thermomètre. L'étalonnage est souvent incorporé au thermomètre, ce qui permet une lecture rapide; ainsi, dans le cas de la thermistance, le thermomètre complet comprend soit la courbe d'étalonnage, soit un ohm-mètre dont le cadran a été gradué en degrés.

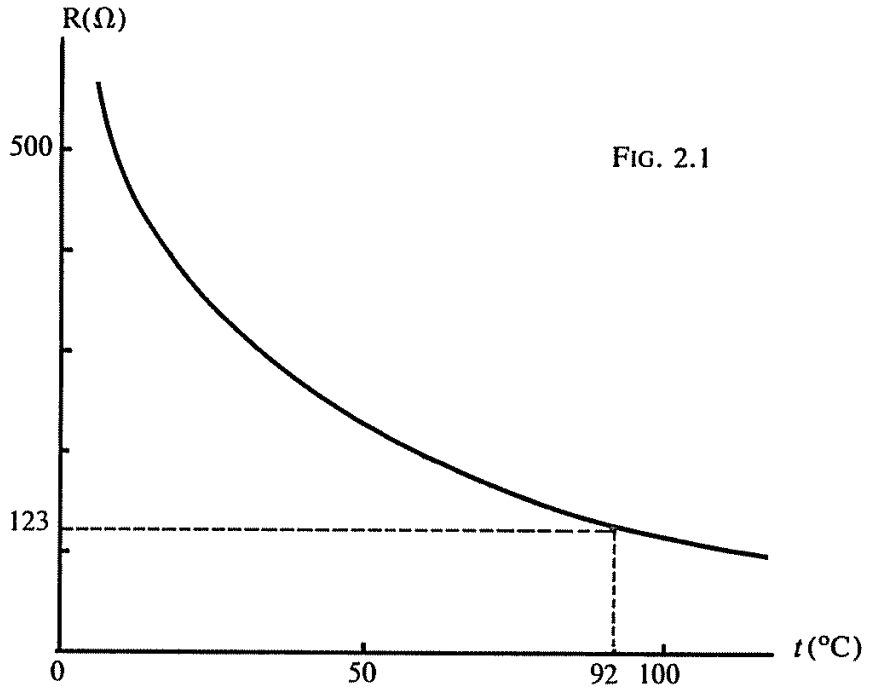


FIG. 2.1

Comme à tous les appareils de mesure, on demande à un thermomètre d'être fidèle, précis, sensible; de plus, il ne doit pas modifier (ou le moins possible) la température (du corps ou de l'enceinte) qu'on veut mesurer.

2.2 Exemples de thermomètre

1° *Thermomètres à dilatation :* ceux qui utilisent un liquide sont bien connus; le liquide est du mercure (qui fond à −39 °C), du toluène ou de l'alcool coloré. Ils présentent une certaine inertie et leur fidélité a parfois été douteuse (l'erreur pouvant atteindre 2 °C avec les plus mauvais); leur précision dépasse rarement 0,01 °C. Le thermomètre à gaz peut être classé dans la même catégorie; on y reviendra plus loin. Les thermomètres à dilatation de solide, peu sensibles, ne sont pas employés; il faut signaler cependant le bilame, souvent utilisé pour couper (ou établir) un contact électrique à une température donnée (fig. 2.2). A cause de la différence des dilatations, l'ensemble constitué de deux lames soudées de métaux différents, se cambre plus ou moins quand la température augmente.

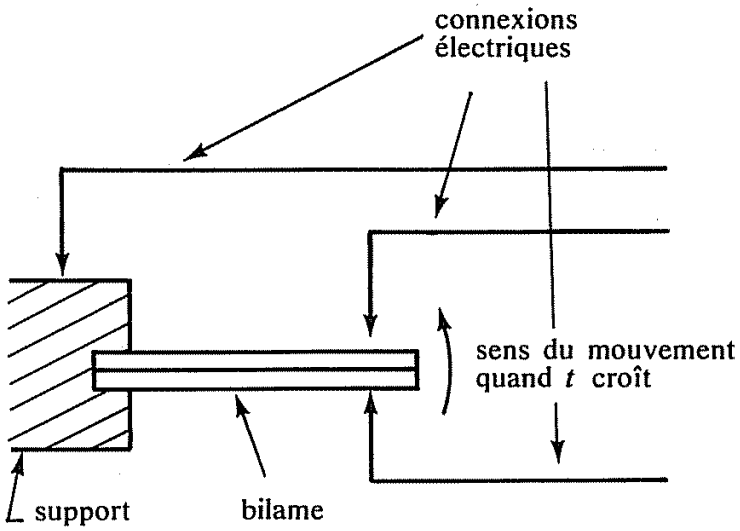


FIG. 2.2

2° *Thermomètres « électriques » :* on a déjà cité la thermistance (§ 2.1); le morceau de silicium pouvant être très petit, ce thermomètre a donc peu d'inertie (fig. 2.3); sa précision dépend évidemment de l'appareil de mesure électrique (avec lequel on peut lire, soit 123 Ω soit 123,47 Ω, etc.); comme on peut le constater d'après la courbe d'étalonnage (fig. 2.1), sa sensibilité varie beaucoup avec la température : très grande à basse température — une faible variation de température correspond à une forte variation de résistance — elle décroît rapidement quand la température augmente.

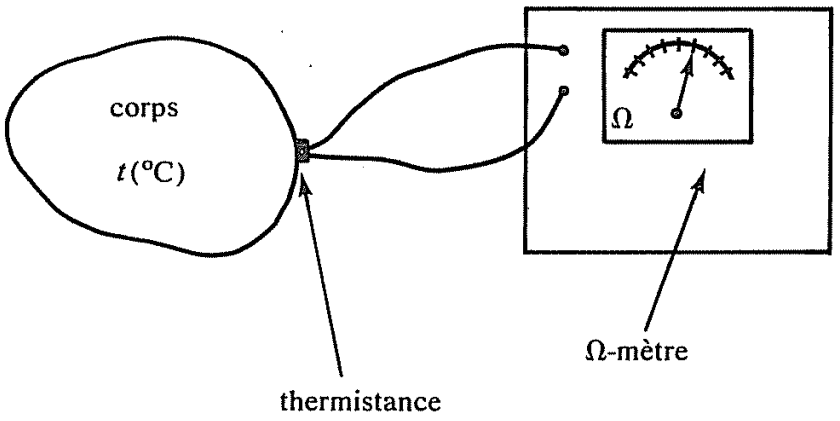


FIG. 2.3

Le thermomètre à résistance de platine a une sensibilité dépendant beaucoup moins de la température. Sa résistivité est aussi peu sensible aux impuretés présentes dans le métal (à la différence du silicium). Aussi on l'emploie comme référence secondaire (§ 3.3), car sa mise en œuvre est beaucoup plus simple que celle du thermomètre à gaz.

Le couple thermoélectrique est constitué de fils de métaux différents 1 et 2 soudés en deux points; il apparaît entre deux points de 1 (fig. 2.4) une f. é. m. qui dépend de la différence des températures des deux soudures; il faut donc maintenir l'une des deux à une température fixe qui sert de référence. Peu commode, peu sensible, mais de faible inertie et peu fragile, le couple thermoélectrique est surtout utilisé à haute température.

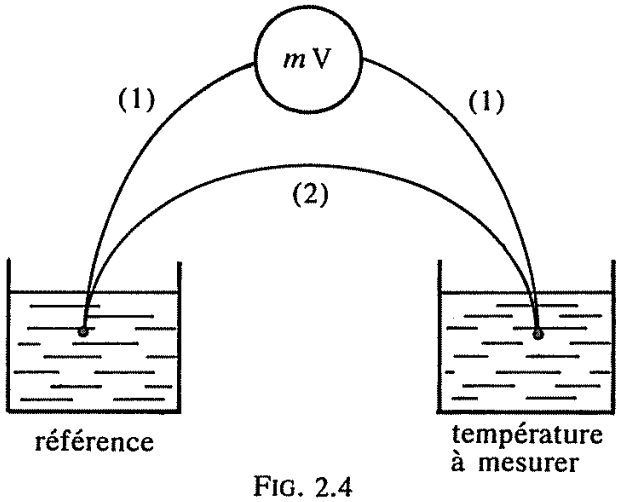


FIG. 2.4

3° *Thermomètres à variation de couleur :* un corps (y compris le corps humain) diffuse la lumière qu'il reçoit de manière plus ou moins sélective, ce qui lui confère sa couleur; de plus, il émet lui-même de la lumière (visible ou non).

Certains cristaux liquides (phase intermédiaire entre l'état solide rigide et l'état fluide) changent très rapidement de couleur dans un intervalle de l'ordre de quelques degrés; ils peuvent donc faire de bons thermomètres

mais dans cet intervalle seulement. De plus, leur fragilité restreint leur utilisation aux températures voisines de l'ambiante (10 à 90 °C selon le composé).

Considérons plus généralement un corps que l'on chauffe (exemples : morceau de fer dans une forge, boulon destiné à être rivé à chaud, intérieur d'un four pour préparer des émaux ou cuire du pain, etc.); la lumière qu'il émet vérifie à peu près les lois suivantes :

— la puissance lumineuse émise dans tout le spectre est proportionnelle à T^4,

— la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum d'intensité du spectre dépend de T suivant la loi $\lambda_m T \sim 2900$ (λ en microns, T en degrés absolus).

Ainsi, à haute température, la lumière émise l'emporte très largement sur la lumière diffusée et la couleur du corps ne dépend plus que de T. A $T = 1000$ K (727 °C), $\lambda_m = 2{,}9\ \mu$m, mais la lumière émise dans le visible est déjà importante : le corps est « rouge sombre »; on obtient $\lambda_m = 0{,}48\ \mu$m pour $T = 6000$ K (Soleil) : le corps est alors jaune vif (l'impression visuelle de couleur résulte du spectre émis mais aussi de la sensibilité de l'œil, maximum vers 0,53 μm).

On note enfin que $\lambda_m = 9{,}4\ \mu$m pour $T = 310$ K (37 °C); l'observation du corps humain à cette longueur d'onde, dans l'infrarouge, permet d'en mesurer la température superficielle et, mieux, d'en détecter les faibles inhomogénéités (thermographie).

3. LES ÉCHELLES DE RÉFÉRENCE

Elles sont basées sur l'existence de repères thermométriques et sur les propriétés du gaz parfait.

On peut constater, à l'aide d'un thermomètre quelconque (thermistance par exemple), que *certains phénomènes se produisent toujours à la même température, à condition que la pression soit bien la même;* ces phénomènes constituent autant de *repères thermométriques.*

3.1 L'échelle centésimale à deux repères ou échelle Celsius

Étant donné son intérêt pour notre vie quotidienne, on est convenu :

— d'attribuer les températures :

$t = 0$ à l'équilibre glace-eau sous la pression d'une atmosphère,

$t = 100$ à l'équilibre eau-liquide vapeur sous la même pression,

(le choix de ces valeurs définissant le *degré Celsius* (°C), centième de l'intervalle de température séparant ces deux équilibres),

— de prendre pour grandeur thermométrique la pression p d'une masse constante de *gaz parfait à volume constant,*

— et de fixer arbitrairement une relation linéaire entre p et t, soit $p = at + b$.

Appelons p_0 et p_{100} les pressions mesurées respectivement à 0 et 100 °C;

on obtient sans difficulté : $b = p_0$ et $a = \frac{p_{100} - p_0}{100}$. La relation entre p et t s'écrit :

$$p = \frac{p_{100} - p_0}{100}\left(t + \frac{100\,p_0}{p_{100} - p_0}\right),$$

ou encore :

$$\boxed{p = \frac{p_0}{T_0}(t + T_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{100\,p_0}{p_{100} - p_0}.} \tag{2.1}$$

Si on a *mesuré* p_{100} et p_0 (ou p_0 et T_0), la mesure de p permet le calcul de t (°C). L'échelle définie à partir de 0 °C et 100 °C peut être prolongée sans problème de principe aux températures inférieures ou supérieures à cet intervalle.

3.2 L'échelle à un seul repère : température Kelvin ou absolue

Posons $T = t + T_0$; on remarque alors que, si $t = 0\,°C$, $T = T_0$.

La relation entre p et T devient : $p = p_0 \frac{T}{T_0}$, ou encore :

$$\boxed{p/T = p_0/T_0 = p_1/T_1,} \tag{2.2}$$

(p_1 étant la pression correspondante à un autre repère $T_1 = t_1 + T_0$). Cette formule est à la base de la définition d'une nouvelle échelle : on fixe la valeur de T_1, on mesure p_1 et p, d'où T; il suffit alors d'un *seul repère.*

Depuis 1954, on a pris pour ce repère le point triple de l'eau (où coexistent les trois phases, solide, liquide et vapeur); pour accorder autant que possible l'échelle Celsius ancienne et la nouvelle échelle, on a trouvé qu'il fallait poser $T_1 = 273{,}16$; on mesure alors $T_0 = 273{,}15$; d'où :

$$\boxed{t = T - T_0 = T - 273{,}15,} \tag{2.3}$$

t est exprimé en °C; T, aussi appelée *température absolue,* se mesure en *Kelvin* (K). *On voit que les deux échelles coïncident par translation.*

> *Remarque.* La thermodynamique renforce ce choix d'une échelle à un seul repère (voir § 2 du chap. 5, relatif au cycle de Carnot).

3.3 Détails expérimentaux. Étalons primaire et secondaire

Une version très simplifiée du thermomètre à volume constant est représentée sur la figure 2.5 : la pression est mesurée par la différence entre les niveaux du mercure, le vase V pouvant être monté ou descendu pour obtenir toujours le même volume V de gaz.

On verra au paragraphe suivant qu'un gaz ne devient parfait que quand sa pression tend vers zéro. Afin de déterminer une température T avec un thermomètre à gaz à volume constant, on opère de la manière suivante :

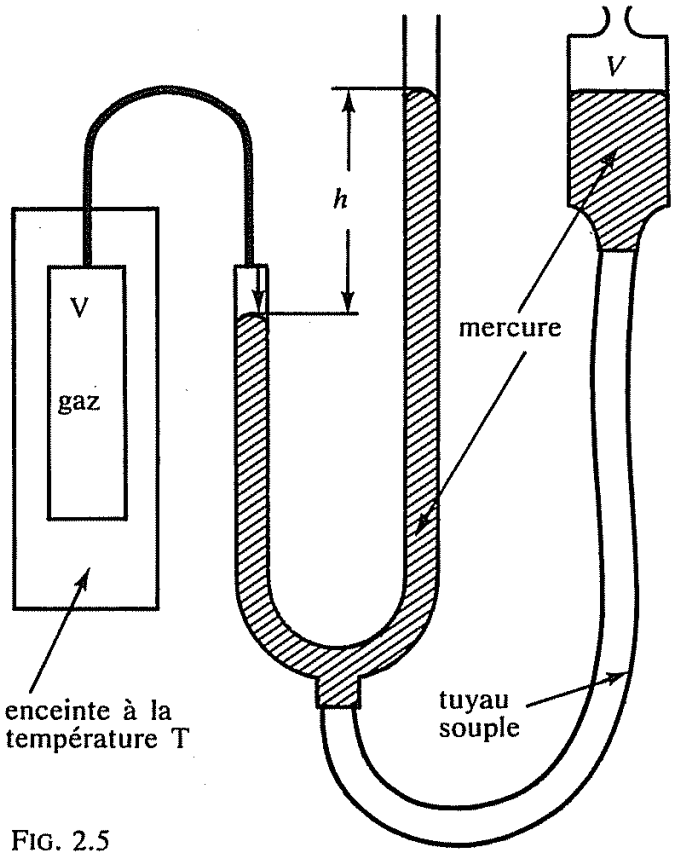


FIG. 2.5

pour une masse m_1 de gaz réel, on obtient p_{01} à la température T_0 et la pression p_1, à la température T; avec la masse plus faible m_2, on obtient p_{02} à T_0, p_2 à T; avec m_3, on obtient p_{03} et p_3, etc. p_{01}, p_{02}, p_{03}, ... d'une part, p_1, p_2, p_3, ... d'autre part, sont évidemment des suites décroissantes.

T est mesurée comme la limite de la quantité $T_0 \frac{p_i}{p_{0i}}$ quand p_{0i} est de plus en plus faible (fig. 2.6) et cela pour tout gaz réel.

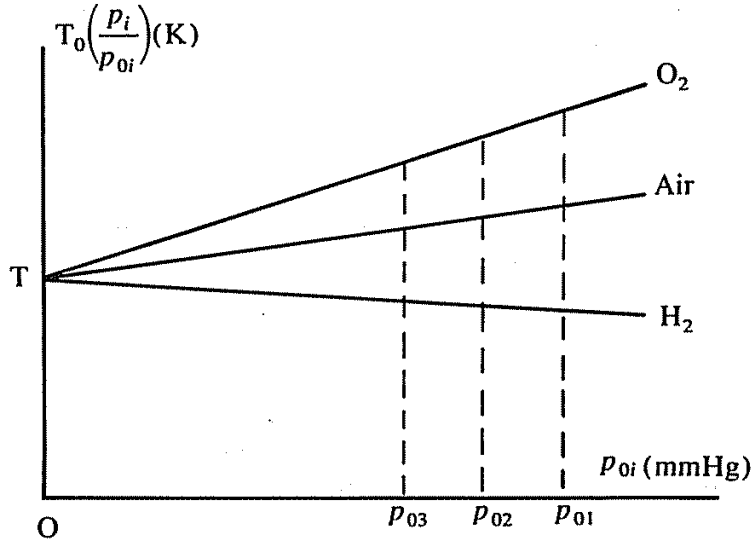


FIG. 2.6

Il est facile de concevoir combien l'appareil précédent et son mode d'emploi peuvent être encombrants! Aussi substitue-t-on couramment à cet *étalon primaire* un *étalon secondaire,* moins précis peut-être, mais plus commode : citons, par exemple, le thermomètre à résistance de platine dont on a parlé ci-dessus, souvent utilisé de $-183\,°C$ à $630\,°C$.

Signalons, pour terminer, qu'on dispose également d'autres repères thermométriques dont les températures ont été mesurées avec précision à l'aide du thermomètre à gaz. On retiendra : l'ébullition de l'hydrogène ($-252,88\,°C$), les fusions du zinc ($419,51\,°C$) et de l'antimoine ($630,50\,°C$), à la pression atmosphérique.

LE GAZ PARFAIT

4. LES PROPRIÉTÉS DU GAZ PARFAIT

L'expérience a permis d'établir certaines lois auxquelles *tous les gaz* obéissent d'autant mieux que *leur pression est plus faible :* aussi est-on convenu d'appeler *gaz parfait* un gaz qui, dans toutes les conditions et *pour une masse* (m) *donnée,* obéirait parfaitement aux lois suivantes :

4.1 A température constante

Le produit de sa pression p par le volume V qu'il occupe est constant (loi de Boyle-Mariotte),

soit : $p\,V = \text{constante, si } t = \text{constante.}$ (2.4)

Les graphes (V, p), à différentes températures croissantes $t_1 < t_2 < t_3$, sont représentés sur la figure 2.7.

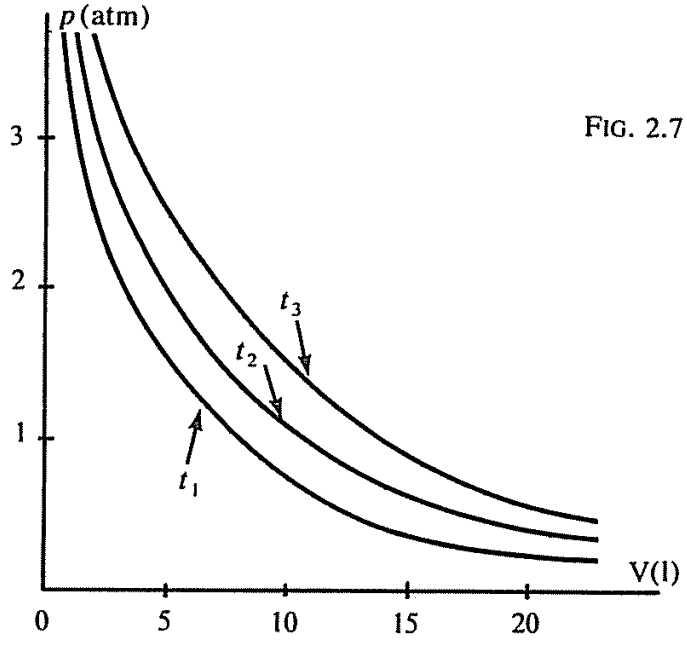


FIG. 2.7

4.2 A pression constante

Le coefficient moyen de dilatation des gaz est le même pour tous (Loi de Gay-Lussac),

soit :
$$\alpha = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1}, \tag{2.5}$$

où V_0 est le volume du gaz à 0 °C et V son volume à la température t (°C). Une forme équivalente de la propriété (2.5) est la relation :

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad \text{si } p = \text{constante}. \tag{2.6}$$

dont le graphe est représenté sur la figure 2.8 pour des pressions croissantes $p_1 < p_2 < p_3$.

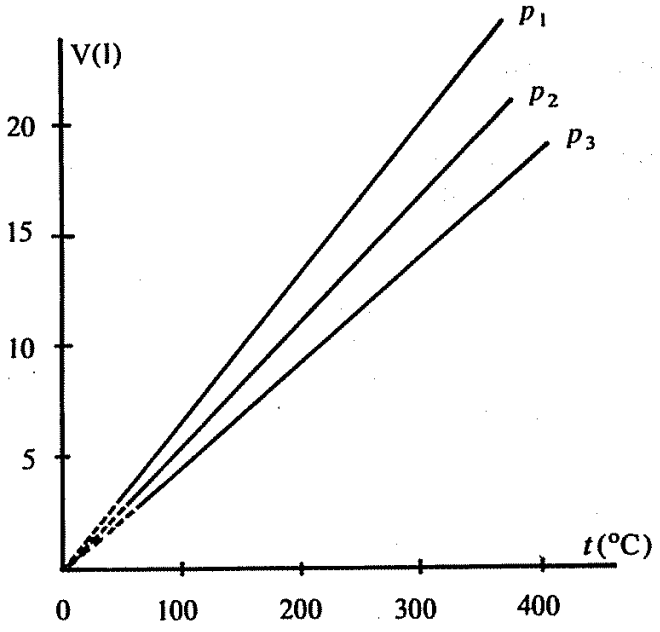


FIG. 2.8

4.3 A volume constant

Le coefficient moyen de variation de pression des gaz est le même pour tous (loi de Charles),

soit :
$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1}, \tag{2.7}$$

ou la forme équivalente :

$$\boxed{p = p_0(1 + \beta t), \quad \text{si V} = \text{constante.}} \tag{2.8}$$

p et p_0 désignant respectivement la pression des gaz aux températures t et 0 °C.

5. ÉQUATION D'ÉTAT DU GAZ PARFAIT

Si l'expérience conduit à trouver $\alpha = \beta$ pour tous les gaz à faible pression, il est vraisemblable que les lois précédentes ne sont pas indépendantes.

Considérons une masse m de gaz parfait dans trois états possibles et différents :

$$\text{état A} \longrightarrow p_0, \text{V}_0, 0\,°\text{C}; \quad \text{état B} \longrightarrow p, \text{V}_0, t;$$
$$\text{état C} \longrightarrow p_0, \text{V}, t.$$

Les états B et C, de même température t, sont tels que : $p\,\text{V}_0 = p_0\text{V}$ selon (2.4). Les états A et C, de même pression p_0, sont tels que $\text{V} = \text{V}_0(1 + \alpha t)$ d'après (2.6). Alors : $p\,\text{V}_0 = p_0\text{V} = p_0\text{V}_0(1 + \alpha t)$; il en résulte : $p = p_0(1 + \alpha t)$. La comparaison de ce résultat avec (2.8) donne, conformément à l'expérience :

$$\boxed{\alpha = \beta.}$$

Soit, maintenant, toujours pour une masse m de gaz parfait, trois états différents :

$$\text{état A} : p_1, \text{V}_1, t_1; \quad \text{état B} : p_2, \text{V}_2, t_2; \quad \text{état C} : p, \text{V}_2, t_1.$$

Pour les états A et C, de même température t_1, nous aurons : $p_1\text{V}_1 = p\,\text{V}_2$ c'est-à-dire $p = p_1 \dfrac{\text{V}_1}{\text{V}_2}$. Pour B et C, de même volume V_2, nous écrirons :

$$p/p_2 = (1 + \alpha t_1)/(1 + \alpha t_2) \quad \text{puisque} \quad \beta = \alpha.$$

De ces deux résultats, il ressort que :

$$p/p_2 = p_1\text{V}_1/p_2\text{V}_2 = 1 + \alpha t_1/1 + \alpha t_2 \longrightarrow \frac{p_1\text{V}_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2\text{V}_2}{1 + \alpha t_2},$$

résultat vrai pour tout état (p, V, t) de la même masse m de gaz puisque A et B sont quelconques :

$$\boxed{\frac{p_1\text{V}_1}{1 + \alpha t_1} = \frac{p_2\text{V}_2}{1 + \alpha t_2} = \frac{p\,\text{V}}{1 + \alpha t} = \text{constante.}} \tag{2.9}$$

Pour obtenir la constante, il suffit de connaître à 0 °C, la pression p_0 et le volume V_0 de la masse m de gaz parfait car :

$$\frac{p\,\text{V}}{1 + \alpha t} = \frac{p_0\text{V}_0}{1 + \alpha \times 0} = p_0\text{V}_0 = \text{constante.}$$

En posant : $\boxed{T = t + 1/\alpha = t + 273{,}15.}$

nous retrouvons la définition (2.3) de l'échelle de température absolue T(K) par rapport à l'échelle Celsius t(°C), et la relation précédente devient :

$$p\,V = p_0 V_0 \alpha (1/\alpha + t) = rT \quad \text{si} \quad r = p_0 V_0 \alpha.$$

Une masse m de gaz parfait, de volume V_0 sous la pression p_0 à 273,15 K, obéit à l'*équation d'état* $pV = rT$ avec $r = p_0 V_0 \alpha$.

Considérons maintenant *une mole* de gaz parfait, de masse molaire $\overline{M}$(*) : l'expérience montre qu'à 0 °C (soit 273,15 K), sous une pression normale ($p_0 = 1$ atm $= 1{,}013\,3 \cdot 10^5$ Pa), cette masse occupe toujours un volume molaire $\overline{V}_0^{(*)} = 22{,}414\,1 = 22{,}414 \cdot 10^{-3}$ m^3. Alors en désignant par R ce qu'il est convenu d'appeler la *constante des gaz parfaits,* c'est-à-dire la valeur de r pour une mole :

$$R = p_0 \overline{V}_0 \alpha = \frac{1{,}013\,3 \cdot 10^5 \times 22{,}414 \cdot 10^{-3}}{273{,}15} = 8{,}314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}.$$

Comme : $1\ \text{l} \cdot \text{atm} = 10^{-3} \times 1{,}013\,3 \cdot 10^5 = 1{,}013\,3 \cdot 10^2$ J, on a aussi :

$$R = 0{,}082\,06\ \text{l} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}.$$

$$\boxed{R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1} (0{,}082\,06\ \text{l} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}).} \quad (2.10)$$

En revenant à une masse quelconque m de gaz parfait, celle-ci contient $\nu = m/\overline{M}$ moles et occupe, sous la même pression p_0 que précédemment, un volume $V_0 = \nu \overline{V}_0$; on a donc la relation supplémentaire : $r = p_0 V_0 \alpha = \nu p_0 \overline{V}_0 \alpha = \nu R$, d'où le résultat :

L'équation d'état de ν moles de gaz parfait, de masse $m = \nu \overline{M}$ est : $pV = \nu RT$.

(2.11)

6. LOI DE DALTON

Considérons un mélange de gaz parfaits; s'il y a ν_i moles de gaz i, il y a en tout : $\nu = \sum_i \nu_i$ moles de gaz parfaits dans ce mélange qui occupe le volume V.

(*) Dans tous les chapitres consacrés à l'étude de la thermodynamique, les grandeurs physiques surmontées d'une barre ($\overline{M}$, $\overline{V}$, ...) sont toujours relatives à une mole.

Par définition, la *pression partielle* du gaz i est :

$$\boxed{p_i = \nu_i \frac{RT}{V}.} \tag{2.12}$$

C'est la pression qu'exercerait le gaz s'il occupait à lui seul, à la température T, *tout le volume* V *qui lui est offert.*

La *loi* expérimentale *de Dalton — loi des pressions partielles* — affirme que la pression totale p, exercée par l'ensemble des gaz occupant le volume V à la température T, est la somme de leurs pressions partielles :

$$\boxed{p = \sum_i p_i.} \tag{2.13}$$

De (2.12 et 13), il vient :

$$p_i/p = \nu_i(RT/V)/\left(\sum_i \nu_i\right)(RT/V) = \nu_i/\sum_i \nu_i = \nu_i/\nu = x_i,$$

soit :

$$\boxed{p_i = x_i p \quad \text{où} \quad x_i = \nu_i/\nu, \sum_i x_i = 1,} \tag{2.14}$$

autre définition de la pression partielle si $x_i = \nu_i/\nu$ représente la *fraction molaire* du gaz i dans le mélange.

Remarque.

La loi de Dalton est en fait une conséquence de la théorie cinétique des gaz. Si le i-ème gaz pur occupe à lui seul le volume V, sa pression p_i est liée à son énergie cinétique totale de translation par la relation (1.9) :

$$p_i V = \frac{2}{3}\langle E_{c,i}^t \rangle.$$

Pour le mélange à la pression p, la même relation donne :

$$p V = \frac{2}{3}\langle E_c^t \rangle,$$

où $\langle E_c^t \rangle$ est l'énergie cinétique totale de translation de *toutes* les molécules. Comme il n'y a pas d'interactions entre les molécules :

$$\langle E_c^t \rangle = \sum_i \langle E_{c,i}^t \rangle \quad \text{implique :} \quad p = \sum_i p_i.$$

7. SIGNIFICATION MICROSCOPIQUE DE LA TEMPÉRATURE ABSOLUE

Soit une mole de gaz parfait, c'est-à-dire N_A molécules où N_A est le *nombre d'Avogadro :*

$$\boxed{N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mole}^{-1}.} \tag{2.15}$$

De : $p\overline{V} = \frac{2}{3}\langle E_c^t \rangle = \frac{2}{3} N_A \left(\frac{1}{2} m v_q^2\right)$, résultat établi par la théorie cinétique des gaz et de $p\overline{V} = RT$, équation d'état du gaz parfait, il vient :

$$\frac{2}{3} N_A \left(\frac{1}{2} m v_q^2\right) = RT \longrightarrow \frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Or, $\frac{1}{2} m v_q^2$ représente l'*énergie cinétique moyenne de translation* $\langle e_c^t \rangle$ *d'une molécule* de gaz parfait et par conséquent :

$$\boxed{\langle e_c^t \rangle = \frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} kT,} \qquad (2.16)$$

en posant :

$$\boxed{k = R/N_A = 8{,}314/6{,}022\,10^{23} = 1{,}380\,10^{-23}\ J \cdot K^{-1},} \qquad (2.17)$$

pour la *constante de Boltzmann.*

Ainsi, *la température absolue* T, *exprimée en Kelvin, est une mesure de l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule de gaz parfait.*

Nous voyons aussi qu'au *zéro absolu* (0 K) $\langle e_c^t \rangle = \frac{1}{2} m v_q^2 = 0$: du seul point de vue de la translation, les molécules sont donc immobiles en moyenne, mais ce résultat n'implique en aucun cas que leur énergie totale soit nulle.

3

SYSTÈMES THERMOMÉCANIQUES ET PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1. CHALEUR ET PUISSANCE DISSIPÉE PAR LES FORCES NE DÉRIVANT PAS DE POTENTIELS. EXPÉRIENCE DE JOULE

Une particule peut simultanément être soumise à des forces qui dérivent ou ne dérivent pas de potentiels. Considérons, par exemple, le cas d'un objet sur lequel s'exerce un frottement de glissement $(\vec{F}_f = -K\eta\vec{v})$; le travail de la force de frottement va dépendre du chemin parcouru par le corps : même si la trajectoire est fermée, ce travail ne sera pas nul, de sorte que $\oint \vec{F}_f \cdot d\vec{r} \neq 0$. La force $\vec{F}_f$ qui manifeste ses effets en de nombreuses circonstances, ne dérive donc pas d'un potentiel.

Désignons alors par $\vec{F}_p$ la résultante des forces dérivant de potentiels et par $\vec{F}_{np}$ celle des forces qui n'en dérivent pas. La variation élémentaire dE_c de l'énergie cinétique étant égale au travail élémentaire *de l'ensemble des forces* appliquées, nous avons :

$$dE_c = đW = \vec{F}_p \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{np} \cdot d\vec{r},$$

ou encore :

$$dE_c = \vec{F}_p \cdot \vec{v}\, dt + \vec{F}_{np} \cdot \vec{v}\, dt.$$

De $dE_c = \dot{E}_c\, dt$, nous obtenons :

$$\dot{E}_c = \vec{F}_p \cdot \vec{v} + \vec{F}_{np} \cdot \vec{v}.$$

Pour les forces $\vec{F}_p$ qui dérivent de potentiels, on écrit aussi :

$$-dE_p = \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \vec{F}_p \cdot \vec{v}\, dt, \quad \text{d'où :} \quad \dot{E}_p = -\vec{F}_p \cdot \vec{v}.$$

L'addition de ces deux relations donne enfin :

$$\boxed{\dot{E}_t = \dot{E}_c + \dot{E}_p = \vec{F}_{np} \cdot \vec{v},} \qquad (3.1)$$

en convenant, comme au chapitre 6 du tome 1, que l'énergie mécanique totale E_t est la somme des énergies cinétique et potentielle de la particule. La relation (3.1) appelle deux remarques :

— Dans le cas où une particule se déplace dans un champ de forces ne dérivant pas d'un potentiel, il n'y a plus conservation de son énergie mécanique totale puisque $\vec{F}_{np} \neq \vec{0} \longrightarrow \dot{E}_t \neq 0$, c'est-à-dire $dE_t = \dot{E}_t\, dt \neq 0 \longrightarrow E_t \neq$ constante.

— La variation temporelle de l'énergie mécanique totale, c'est-à-dire la vitesse à laquelle elle évolue (mesurée par sa dérivée $\dot{E}_t$), est égale à la puissance dissipée par l'ensemble des forces ne dérivant pas de potentiels et agissant sur la particule.

En général $\vec{F}_{np} \cdot \vec{v} < 0$ — notamment dans le cas des forces de frottement où $\vec{F}_{np} = -K\eta\vec{v} \longrightarrow \vec{F}_{np} \cdot \vec{v} = -K\eta\,|v|^2 < 0$ — *l'énergie mécanique totale décroît à une vitesse exactement égale à celle du travail moteur effectué par les forces ne dérivant pas de potentiels;* la mécanique ne peut aller plus loin dans l'étude de cette situation car elle ne peut préciser comment se manifeste la puissance dissipée par les forces $\vec{F}_{np}$. Ce fut le grand mérite de Joule (1850) de montrer qu'elle apparaissait en fait sous forme de *chaleur* dans le milieu visqueux générateur de frottement, la température de ce fluide s'accroissant de manière telle que *la quantité de chaleur* $Q_{AB} > 0$ *nécessaire à cet accroissement est égale au travail des forces ne dérivant pas de potentiels :*

$$Q_{\widehat{AB}} = -\int_{\widehat{AB}} \vec{F}_{np} \cdot d\vec{r}; \tag{3.2}$$

(le signe $-$ provient de ce que $Q_{\widehat{AB}} > 0$ et $\vec{F}_{np} \cdot d\vec{r} < 0$). En fait, nous savons maintenant par une étude microscopique du fluide visqueux que cette quantité de chaleur n'est rien d'autre qu'un accroissement de l'énergie moyenne des molécules du fluide : le travail des forces ne dérivant pas de potentiels est donc un *transfert d'énergie* de la particule, dans son champ de forces dérivant d'un potentiel, aux particules constitutives du fluide. Signalons enfin que ce transfert a un caractère irréversible car il s'exerce d'une particule vers toutes celles du fluide.

Disons, pour terminer, quelques mots de l'expérience de Joule schématisée sur la figure 3.1. Dans un calorimètre (C) — c'est-à-dire un récipient interdisant les échanges de chaleur avec l'extérieur — on introduit une masse m de fluide (eau, par exemple). Un dispositif à renvoi, muni de palettes (P) et mû par la chute d'une masse extérieure M, exerce un frottement constant sur l'eau du calorimètre, élevant ainsi sa température mesurée par le thermomètre (T).

Quand le poids Mg a atteint sa vitesse limite de chute $v_0 = C^{te}$, toute la puissance qu'il produit dans sa chute est dissipée en frottements dans le fluide et le réchauffe : $\dot{E}_t = \dot{E}_p = Mg\, v_0$.

Soit Q la chaleur contenue à l'instant t dans le calorimètre : sa vitesse d'apparition est donnée par $\dot{Q}$ et elle peut être déterminée en mesurant la vitesse à laquelle la température T évolue, soit $\dot{T}$. Entre ces deux grandeurs, on a la relation : $\dot{Q} = mc\,\dot{T}$, où c est la chaleur massique du fluide (c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'un gramme de fluide).

L'expérience confirme alors que, si l'on utilise la même unité (le watt) pour mesurer la puissance mécanique $Mg\,v_0$ et la puissance calorifique $\dot{Q}$, on trouve : $\dot{Q} = \dot{E}_t$, soit : $Mg\,v_0 = mc\,\dot{T}$.

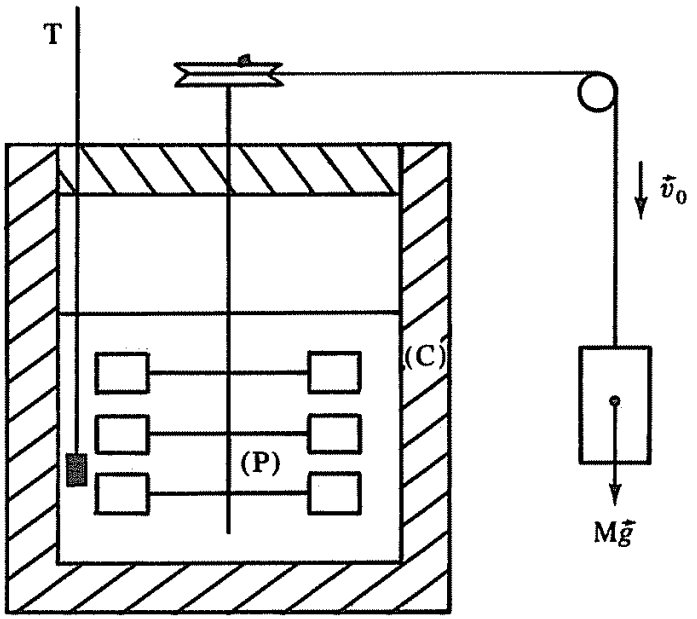


FIG. 3.1

A l'époque de Joule, les quantités de chaleur étaient mesurées en *calories,* unité de chaleur définie comme suit :
la calorie (cal) est la quantité de chaleur requise pour amener la température d'un gramme d'eau de 14,5 à 15,5 °C.
(Ses multiples les plus courants sont la kilocalorie (1 kcal = 10^3 cal) et la thermie (1 th = 10^6 cal).)

Puisqu'en fait l'expérience de Joule montre que la chaleur n'est qu'une forme de l'énergie, cette unité de chaleur est maintenant abandonnée et doit être remplacée par le *joule* (J), l'équivalence étant obtenue par la relation :

$$\boxed{1 \text{ calorie} = 4{,}1840 \text{ joules.}} \qquad (3.3)$$

2. TRANSFERTS DE CHALEUR

Dans la matière et dans l'espace, l'énergie thermique qu'est la chaleur se propage de trois façons différentes : la conduction, la convection et le rayonnement.

2.1 Transfert par conduction

Soit la figure 3.2a représentant deux enceintes renfermant deux gaz à des températures T_1 et T_2 différentes ($T_1 < T_2$). Si nous mettons ces gaz en contact (fig. 3.2b), il y a transfert d'énergie cinétique, par collisions, des molécules à la température T_2 vers les molécules à la température T_1 : après un certain temps, toutes les molécules ont la même énergie cinétique

moyenne et une température T intermédiaire entre T_1 et T_2 : ce transfert d'énergie par *contact direct* est la *conduction* et ne peut donc exister dans le vide.

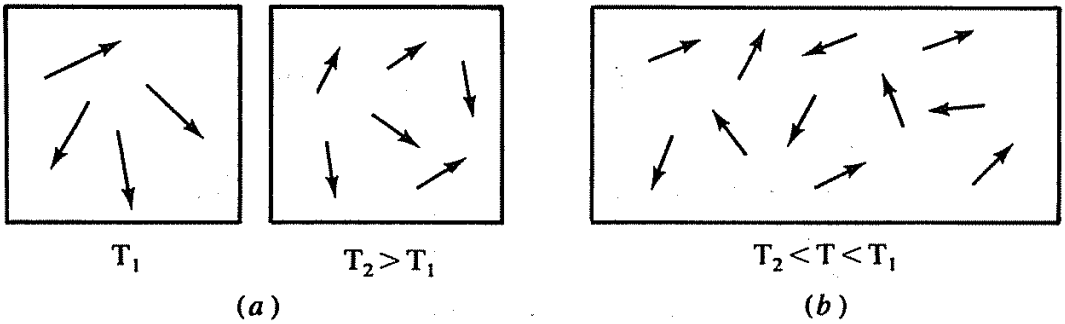


FIG. 3.2

On le rencontre aussi dans un corps dont deux points — au moins — sont portés à des températures différentes : par exemple, un barreau métallique chauffé en T_2 et refroidi en T_1 (fig. 3.3). Il est possible de montrer, en

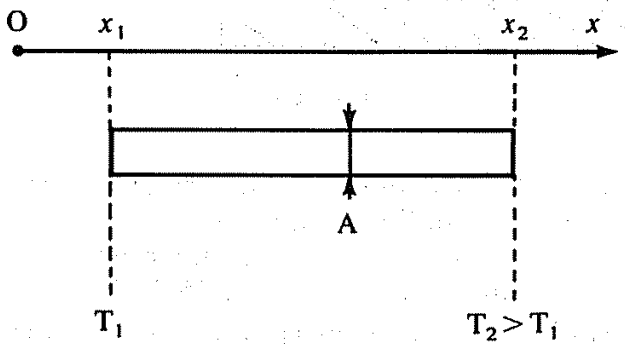


FIG. 3.3

raisonnant sur l'énergie thermique comme en électrocinétique, que le débit moyen de chaleur $\Delta Q/\Delta t$ est proportionnel à l'aire A de la section droite du barreau, inversement proportionnel à la longueur $\Delta x = (x_2 - x_1)$ entre laquelle on applique la différence de température $\Delta T = (T_2 - T_1)$. On obtient ainsi :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Ce débit s'effectuant de x_2 vers x_1, donc selon les x décroissants, s'écrit, en passant à la limite :

$$\dot{Q} = -KA \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.4}$$

où K est une constante caractéristique du matériau appelée *coefficient de conductivité thermique* et se mesure en $W \cdot m^{-1}\ deg^{-1}$. Les corps de faible K sont des isolants thermiques (air immobile : 0,02; alcool éthylique : 0,19; verre Pyrex : 1,7) et ceux de K élevés sont de bons conducteurs thermiques (fer : 73, aluminium : 229, argent : 420).

2.2 Transfert par convection

Ce type de transfert se rencontre quand il y a un flux d'énergie thermique produit par un *déplacement de matière* à des températures différentes : *il ne peut donc se produire dans le vide.*

Exemples. • L'eau chauffée dans une casserole monte du fond du récipient vers la surface où elle se refroidit; elle redescend ensuite le long des parois verticales et le cycle recommence.

• Dans une pièce chauffée par un radiateur mural, l'air chaud part de ce radiateur et monte vers le plafond puis se dirige vers la source froide que constitue, par exemple, une fenêtre fermée. L'air refroidi descend vers le sol et au voisinage du radiateur se réchauffe, etc.

Tous ces mouvements sont dus en fait à la variation de la masse volumique des fluides (air, eau) qui décroît quand la température croît.

2.3 Transfert par rayonnement

Les particules électriques de la matière, au cours de leurs vibrations entretenues par l'énergie thermique, sont susceptibles d'émettre des *ondes électromagnétiques*. Plus les corps sont chauds, plus l'énergie ainsi émise est grande et plus la fréquence des ondes correspondantes est élevée.

Cela apparaît sur la figure 3.4 où l'on a porté l'intensité I du spectre émis par un corps à trois températures différentes; quand la température est basse, l'essentiel du spectre est surtout riche dans l'infrarouge (IR) : un radiateur, dans le noir, se détecte par la chaleur qu'il émet essentiellement sous forme de rayonnement IR invisible. A température plus élevée, un

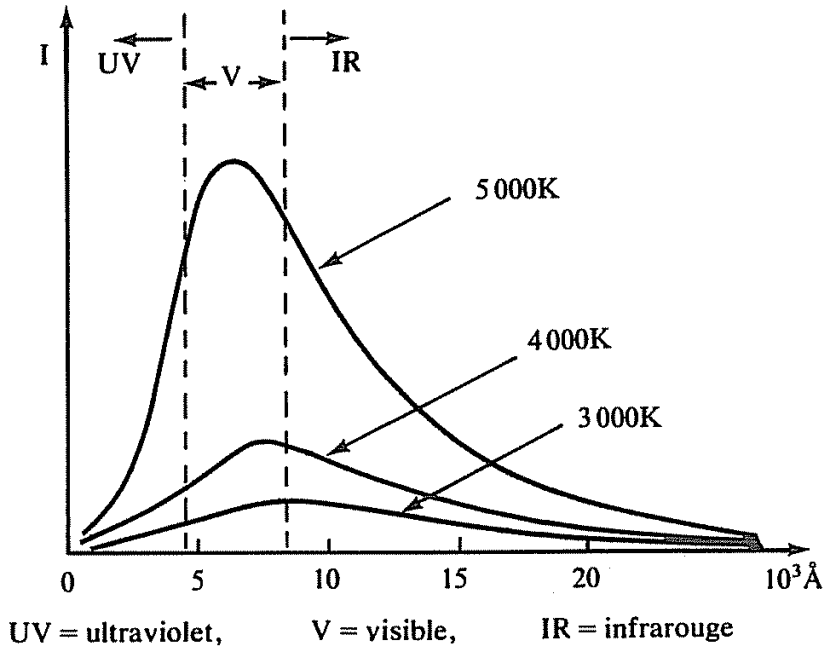


FIG. 3.4

corps chaud change d'aspect : c'est le cas par exemple d'un morceau de fer qui, chauffé dans un four, devient rouge sombre puis rouge orangé au fur et à mesure que la température du four s'accroît.

3. SYSTÈMES THERMOMÉCANIQUES

3.1 Caractéristiques d'un système thermomécanique

Si l'on considère un ensemble de corps (solides, liquides, et/ou gazeux) séparé fictivement ou bien réellement du reste de l'Univers, on l'appelle *système* et le reste de l'Univers constitue le *milieu extérieur* au système. Comme ce système peut subir des transformations — avec ou sans intervention du milieu extérieur — et celles-ci étant aussi générales que possible (transferts de matière, de chaleur, modifications de volume, de température, etc.), on parlera plus précisément de *système thermomécanique.*

Un système thermomécanique sera dit :

— *ouvert* s'il peut échanger de la *matière* et de l'*énergie* avec le milieu extérieur,

— *fermé* s'il n'échange que de l'*énergie* avec ce milieu,

— *isolé* s'il ne peut échanger *ni matière ni énergie* avec l'extérieur.

Dans le cas particulier d'un système fermé ou l'échange d'énergie se fait exclusivement sous forme de transferts de chaleur (§ 2), le *système* pourra être qualifié de *thermique.*

Exemples. • Une casserole d'eau bouillante sur une cuisinière est un système ouvert.

• Un thermomètre plongé dans un gaz est un système fermé.

• Du café dans une bouteille Thermos étanche et de bonne qualité est un système isolé de l'extérieur.

3.2 Variables thermomécaniques et états d'un système

Au cours de son évolution — dont la description ne peut être que statistique à cause du grand nombre d'atomes ou de molécules mis en jeu — certaines *variables macroscopiques* directement observables caractérisent, à tout instant, l'*état d'un système thermomécanique.*

Exemple. Une masse m de gaz réel enfermé dans un corps de pompe constitue un système fermé; par l'intermédiaire du piston, le milieu extérieur peut exercer une force sur le système en comprimant le gaz : au cours de cette transformation, le volume passe de V_1 à V_2, sa température T pouvant changer ou non; immobilisons le piston et chauffons le corps de pompe : le gaz s'échauffe à volume V constant, sa température croissant de T_1 à T_2 durant cette nouvelle transformation. Finalement, le système thermomécanique a subi une *suite de transformations,* qui l'ont amené d'un *état initial* à un *état final* différent puisque les *variables thermomécaniques* qui caractérisent ce système ne sont plus les mêmes.

Ces variables thermomécaniques sont de deux types; elles peuvent être :

— *extensives* quand elles sont proportionnelles aux dimensions du système; dans ce cas, divisons le système thermomécanique en deux parties arbitraires : si nous appelons x_1 et x_2 la valeur de la variable considérée pour chacune de ces parties alors, pour le système entier, nous avons :

$$x = x_1 + x_2.$$

Exemples : volume, énergie, quantité de chaleur reçue par un système, nombre de moles;

— *intensives* quand elles sont indépendantes des dimensions du système; si y, y_1 et y_2 désignent les valeurs prises par une de ces variables dans le système entier ci-dessus et ses deux parties, nous avons dans ce cas :

$$y = y_1 = y_2.$$

Exemples : pression, température, masse volumique.

3.3 Équations d'état et variables thermomécaniques indépendantes

Lorsque le système est en *équilibre thermomécanique,* c'est-à-dire lorsque son état ne change pas dans le temps, *ses variables thermomécaniques ne sont pas toutes indépendantes* car elles apparaissent reliées expérimentalement par une ou plusieurs *équations d'état du système* dont la complexité est liée naturellement à celle du système.

Exemples. • Pour un gaz parfait, nous avons établi l'équation d'état : $p\,\mathrm{V} = \nu\mathrm{RT}$; deux variables thermomécaniques de ce système sont réellement indépendantes car, une fois fixée la masse m de gaz $\left(\nu = m/\mathrm{M}\right)$, la donnée de ($p$, V) ou (V, T) ou ($p$, T) et de $p\,\mathrm{V} = \nu\mathrm{RT}$ définit T ou p ou V.

• Pour un *gaz réel,* aux fortes pressions, son équation d'état peut être : $p(\mathrm{V} - b) = \nu\mathrm{RT}$; dans un domaine plus large de validité, on peut prendre aussi :

$$\left(p + \frac{a}{\mathrm{V}^2}\right)(\mathrm{V} - b) = \nu\mathrm{RT} \quad \text{ou} \quad p\,\mathrm{V} = \nu\mathrm{RT}\left(1 + \frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{V}} + \frac{\mathrm{B}_3}{\mathrm{V}^2} + \ldots\right).$$

Là aussi, seules deux variables thermomécaniques sont réellement indépendantes.

3.4 Transformations quasi-statiques

Au cours de ces échanges avec le milieu extérieur, *les conditions d'équilibre définies* par l'équation d'état du système et les variables thermomécaniques indépendantes ne sont plus respectées, à savoir la *constance* en fonction du temps *de toutes les variables thermomécaniques du système.* Par exemple, si on chauffe ce système, un gradient de température va s'établir provoquant des transferts de masse et d'énergie par convection; ainsi, les variables intensives comme la température, la concentration, la masse volumique ne seront plus constantes dans tout le système et l'équation d'état n'a alors plus aucun sens.

Si l'on veut suivre l'évolution d'un système thermomécanique en utilisant son équation d'état, il faut donc que sa *transformation* soit *quasi-statique,* c'est-à-dire puisse être considérée comme une *succession d'états d'équilibre* très rapprochés obtenue *très lentement* et de manière *réversible,* puisque le sens de l'évolution dépend du sens de la variation des variables indépendantes du système.

Au cours d'une telle transformation, l'équilibre interne du système (caractérisé par la constance de ses variables intensives) et l'équilibre du système avec le milieu extérieur (défini par la constance des variables intensives communes) doivent être évidemment réalisés.

Exemple. Au sein du système, il ne doit pas y avoir de transfert rapide des masses si l'on veut assurer la constance de la densité; si p et T sont les mêmes en tout point du système, l'équation d'état reprend sa signification : pour cela, il faut aussi que la pression et la température du milieu extérieur soient les mêmes que dans le système pour qu'il n'y ait pas de transformations spontanées donc irréversibles.

3.5 Réversibilité et irréversibilité

Précisons sur un exemple mécanique ce que l'on entend par *réversibilité* d'une transformation. Soit une masse de gaz enfermée dans un corps de pompe isolé thermiquement et muni d'un piston sans frottement de surface S et de masse M (fig. 3.5). Ajoutons sur ce piston une masse m et abandonnons le tout : le gaz va être comprimé et après quelques oscillations, le piston va s'immobiliser, la pression interne du gaz étant exactement celle exercée par l'extérieur, le piston et m : $p = p' + (\mathrm{M} + m)\mathrm{g}/\mathrm{S}$. La température du gaz a alors une certaine valeur T.

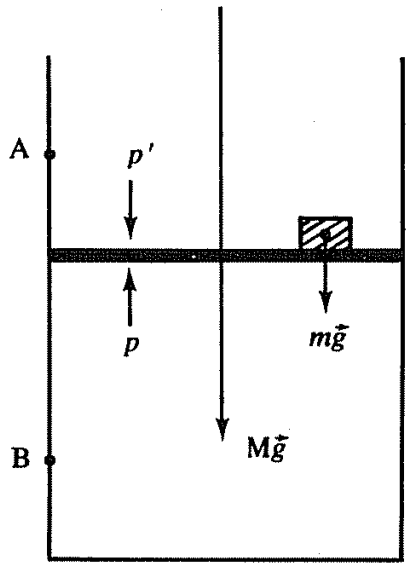


FIG. 3.5

Si l'on ajoute maintenant sur le piston une masse $\Delta m \ll m$, une très légère compression du gaz est obtenue et le nouvel état d'équilibre est caractérisé par les variables $(\mathrm{T},\ p + \Delta p = p' + (\mathrm{M} + m + \Delta m)\mathrm{g}/\mathrm{S})$. Nous pourrions tout aussi bien retrancher la masse Δm, le gaz se détendant très

légèrement vers un nouvel état d'équilibre $(T, p' + (M + m - \Delta m)g/S)$. Si $\Delta m \longrightarrow 0$, on a $\Delta p \longrightarrow 0$ et la pression p du gaz est toujours égale à celle du milieu extérieur : alors en prenant son temps, on peut passer d'une position A à une position B du piston par une succession de transformations mécaniques lentes et réversibles, donc quasi-statiques, la pression p étant connue à tout instant.

Si on avait enlevé sans précaution la masse excédentaire m, il y aurait eu détente rapide du gaz : ajouter une petite masse Δm ne changerait rien à l'évolution *irréversible* du système mécanique obtenue par une suite d'états qui ne sont pas en équilibre.

La *réversibilité thermique* d'un système peut être réalisée de manière similaire en lui ajoutant ou retranchant d'infimes quantités de chaleur par mise en contact avec une infinité de sources extérieures, les températures du gaz et de la source à son contact à l'instant t étant les mêmes : là encore on a envisagé des transformations quasi-statistiques où T est toujours connue. Une transformation irréversible s'obtient par exemple, en entourant le cylindre de glace en quantité suffisante : la température du gaz va s'abaisser rapidement jusqu'à atteindre 0 °C et ne pourra d'elle-même, sans modification du milieu extérieur, revenir à sa valeur d'origine.

Remarque. Le caractère quasi-statique d'une transformation réversible implique que les *transformations réelles,* réalisées sans précaution particulière, et *les transformations spontanées sont généralement irréversibles* (exemples : tôle froissée d'une voiture accidentée, ballon d'enfant qui éclate, explosion d'une bouteille pleine d'eau et refroidie en dessous de 0 °C, etc.).

3.6 Transformations monotherme, isotherme, adiabatique, isobare et isochore

Plongeons le corps de pompe précédent dans un grand réservoir d'eau dont la température T_0 est supposée uniforme : la température T du gaz va peu à peu prendre la même valeur ($T \longrightarrow T_0$) sans pour cela modifier sensiblement celle de l'eau du réservoir à cause de la grande capacité thermique de ce milieu extérieur.

Par définition, un milieu extérieur dont la température est maintenue constante sera un *thermostat* (ou réservoir calorifique) : tout système thermomécanique fermé immergé dans un thermostat échangera uniquement de la chaleur avec lui et subira des *transformations monothermes.*

Si au cours de la transformation monotherme et quasi-statique du système, sa température reste constante ($T = T_0$), on précisera que cette *transformation est isotherme :* par définition, une transformation isotherme est *toujours réversible.*

Lorsque le corps de pompe et le piston sont imperméables aux transferts de chaleur, le système ne pourra dans son évolution échanger aucune chaleur avec le milieu extérieur : sa *transformation* sera dite *adiabatique.*

Ajoutons pour terminer qu'on appelle *transformation isobare* une transformation du système réalisée à pression constante et *transformation isochore,* celle où le volume est constant.

Les transformations monothermes, adiabatiques, isobares et isochores peuvent de plus être réversibles ou non.

Exemples. • Soit deux récipients, l'un contenant une masse m de gaz, l'autre vide, réunis par un tuyau et un robinet R; le tout est immergé dans un thermostat (T) (fig. 3.6). Si l'on ouvre le robinet, le gaz se détend de (1) vers (2) au cours d'une transformation monotherme irréversible.

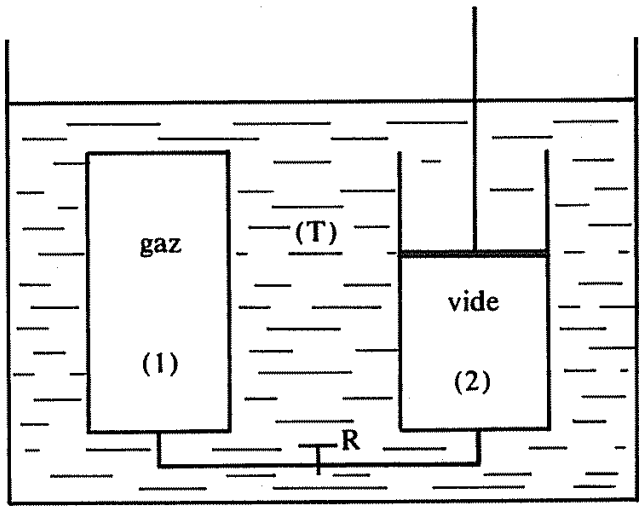


FIG. 3.6

• Remplaçons le récipient (2) par un corps de pompe dont le piston est totalement enfoncé et mettons (1) en communication avec le fond du corps de pompe : en relevant très lentement le piston de manière à égaliser les pressions intérieure et extérieure, on peut obtenir l'état final de l'exemple précédent par une transformation isotherme, c'est-à-dire monotherme et réversible.

• Prenons une pompe à bicyclette et entourons-la d'un chiffon isolant en laine : en bouchant la sortie du corps de pompe et enfonçant rapidement le piston, on comprime violemment l'air qui y est contenu; il est aisé de constater que la température de cet air a sensiblement augmenté au cours de cette transformation adiabatique irréversible.

3.7 Cycles

Un système thermomécanique a décrit un *cycle* quand, après une suite de transformations, son état final est identique à son état initial, *ses variables thermomécaniques retrouvant les mêmes valeurs.*

Exemples. • Reprenons la situation du paragraphe 3.6 où le récipient (2) est le corps de pompe rempli du gaz après la détente isotherme $1 \longrightarrow 2$; en comprimant lentement le piston, on peut ramener (2), et par conséquent (1), dans leurs états initiaux; le gaz a parcouru un cycle de transformations réversibles;

• si, par contre, on enfonce rapidement le piston de (2), on revient bien aux états initiaux du point de vue des volumes mais il faut attendre que l'équilibre thermique entre (1) et le thermostat soit réalisé pour qu'un cycle irréversible ait été effectivement parcouru.

4. CONVENTION DE SIGNES. ÉCHANGES ÉNERGÉTIQUES ÉLÉMENTAIRES

4.1 La convention de signes des physiciens

Dans tout ce qui suit, nous allons donner des expressions variées du travail et de la chaleur élémentaires échangés par un système thermomécanique fermé avec le milieu extérieur. Nous savons (§ 1) que tous ces échanges sont en fait des quantités d'énergie qui passent du système vers le milieu et vice versa. Nous préciserons le sens de ces transferts par la convention suivante :

> Toute l'énergie reçue par un système thermomécanique (en provenance du milieu extérieur) est positive et toute celle qu'il cède (au milieu extérieur) est négative.

Exemples. • Dans l'expérience de Joule, l'eau du calorimètre reçoit durant l'intervalle de temps Δt, à cause du travail du poids, la quantité de chaleur $\dot{Q}\ \Delta t > 0$.

• Une masse de gaz est enfermée dans un corps de pompe; si on *refroidit* ce corps de pompe, le *gaz reçoit* une chaleur $Q < 0$; en même temps que son volume diminue avec la température, le piston s'abaisse et *l'extérieur fournit donc au gaz* un travail $W > 0$.

4.2 Travaux élémentaires

1° *Cas d'un système hydrostatique.* Soit une masse m de fluide enfermée dans un corps de pompe (fig. 3.7) et en équilibre avec le milieu extérieur : c'est donc un fluide hydrostatique ayant mêmes T et p que le milieu extérieur.

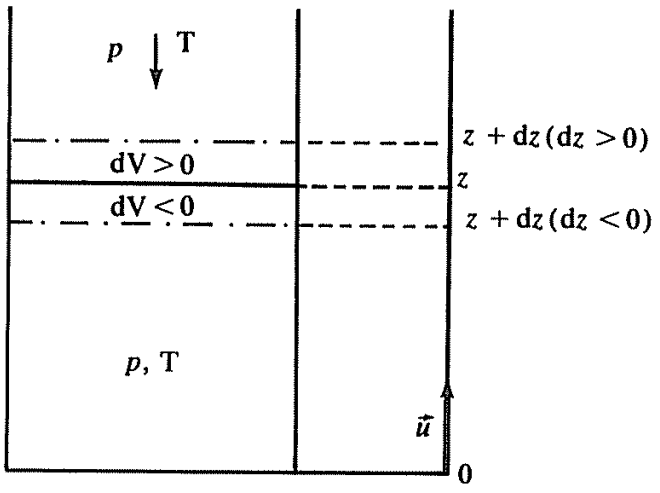


FIG. 3.7

Déplaçons le piston d'une quantité infinitésimale dz : cela ne change pas sensiblement la pression du fluide si nous opérons de manière quasi-statique.

Convenons d'orienter l'axe des z de déplacement du piston par le vecteur $\vec{u}$ dirigé vers l'extérieur du corps de pompe. La position du piston étant repérée par $\vec{r} = z\vec{u}$, le déplacement élémentaire précédent vaut $d\vec{r} = dz\,\vec{u}$ ($dz > 0$ si détente, $dz < 0$ si compression). Le travail élémentaire que fournit le milieu extérieur au système, par l'intermédiaire de la force de pression p qui agit sur l'aire S du piston, s'écrit — avec une convention dont l'explication est reportée à la fin de ce paragraphe :

$$đW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (F\vec{u})\cdot(dz\,\vec{u}) = (-pS\vec{u})\cdot(dz\,\vec{u}) = -pS\,dz,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{đW = -p\,dV.} \qquad (3.5)$$

dV mesurant la variation algébrique du volume pendant le déplacement du piston; si $dV < 0$, $đW > 0$: au cours d'une compression, l'énergie du système s'accroît du travail moteur fourni par le milieu extérieur; si $dV > 0$, $đW < 0$: en se détendant, le fluide fournit du travail contre l'extérieur et son énergie diminue. *Remarquons que les signes de ces travaux élémentaires sont bien conformes à la convention ci-dessus.*

Considérons maintenant un déplacement fini du piston obtenu par une suite de transformations quasi-statiques, la pression intérieure du fluide étant toujours équilibrée par la pression extérieure, et T restant inchangée.

Soit $\overset{\frown}{AC_1B}$ le chemin parcouru par le système pour aller de l'état initial A à l'état final B (fig. 3.8). Le travail qu'il reçoit est mesuré par l'aire de la surface $V_A AC_1 BV_B$ changée de signe.

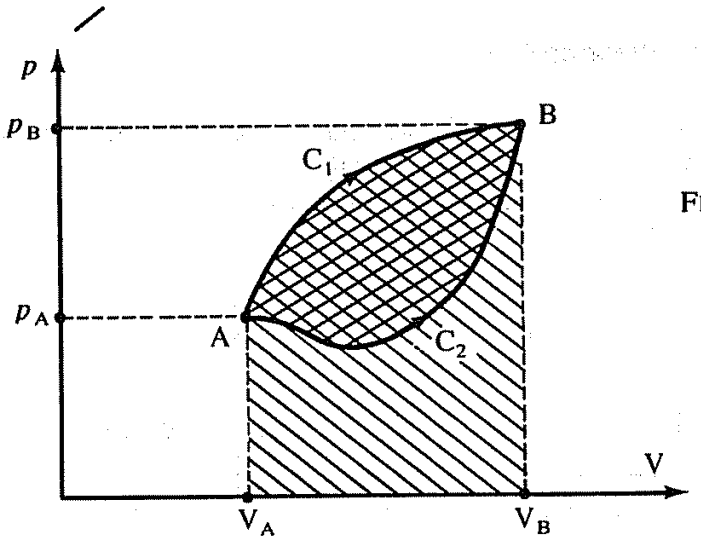


FIG. 3.8

On peut envisager un autre chemin $\overset{\frown}{AC_2B}$ joignant A à B : le travail que reçoit le système est l'aire de $V_A AC_2 BV_B$ changée de signe.

Or $\overset{\frown}{AC_1BC_2A}$ constitue un cycle pour le système et nous voyons sur la figure 3.8 que :

$$\oint đW = \oint -p\,dV = -\text{Aire}\,(AC_1BC_2A).$$

Pour ce cycle quelconque, le travail total reçu par le système n'est pas nul : il en résulte que đW *n'est pas comme* dE_p *la différentielle d'une fonction d'état* dont la variation ne dépend que de l'état initial et de l'état final et est indépendante du chemin parcouru (revoir pour cela les propriétés de l'énergie potentielle E_p au § 7 du chap. 6, t. 1). C'est pour rappeler cette propriété mathématique, très importante en thermodynamique, que nous avons barré le d de đW :

> toute fonction f dont la variation élémentaire est écrite đf est telle que sur un cycle quelconque : $\oint đf \neq 0$.

2° *Autres types de travaux élémentaires.* Il est aisé d'imaginer d'autres situations où un système thermomécanique peut travailler :

— Soit un fil ou un ruban élastique soumis à une tension $\mathcal{T}$ (fig. 3.9a) : s'il s'allonge de dl, alors le système reçoit le travail :

$$đW = \mathcal{T}\, dl. \tag{3.6}$$

$đW > 0$ puisque le fil, étant plus tendu, voit son énergie augmenter.

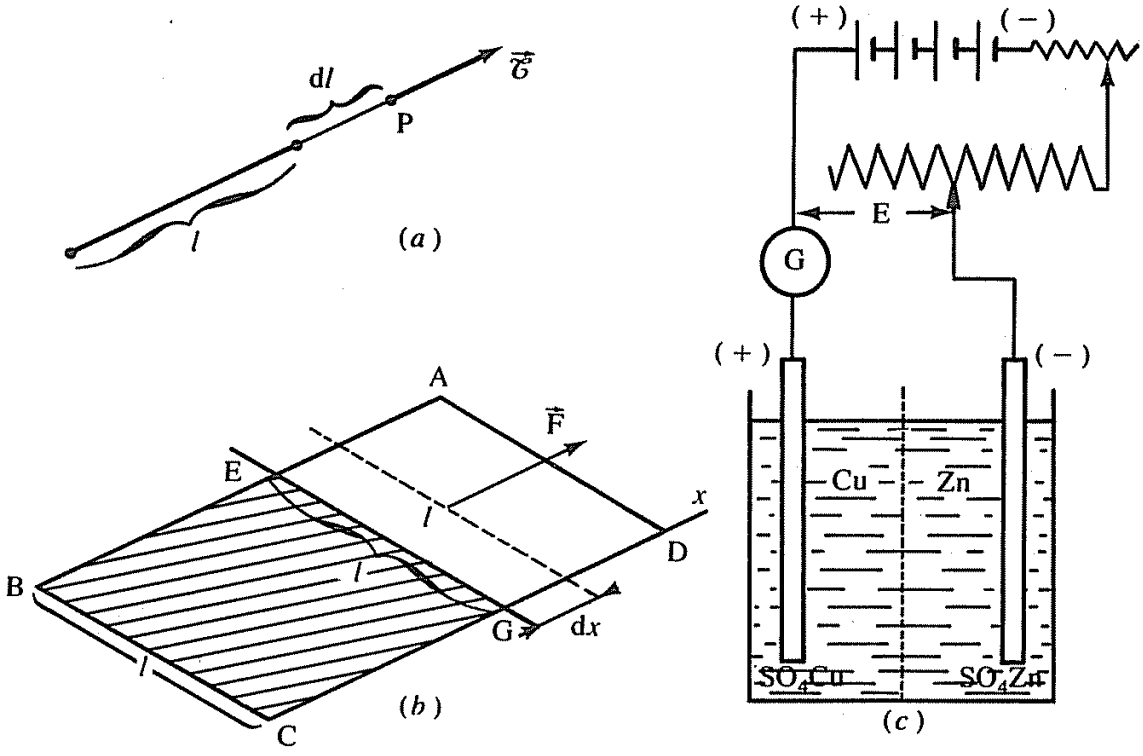


FIG. 3.9

— Soit un cadre rigide rectangulaire ABCD (fig. 3.9b); plongeons le dans un liquide (de l'eau savonneuse, par exemple) : en le retirant avec précaution, on obtient une lame liquide plane tendue sur toute la surface du cadre.

Posons sur lui une tige légère EG, parallèle aux côtés AD et BC et crevons la lame liquide AEGD : on constate alors que la tige EG glisse, sous l'action du film restant, vers l'extrémité BC du cadre. Pour maintenir la tige mobile en place, l'expérience montre qu'il faut exercer sur elle une force F proportionnelle à la longueur l de EG; comme, de plus, elle établit qu'il y a en réalité *deux films,* on pose $F = 2\sigma l$. *La tension superficielle* σ, qui apparaît comme la force exercée par un des films sur l'unité de longueur de la tige, ne dépend que du liquide et de sa température.

Si, maintenant, on déplace la tige parallèlement à elle-même de dx, elle balaye l'aire $l\,dx$; le travail fourni au système par la force F vaut : $đW = F\,dx = \sigma(2l\,dx) = \sigma\,dS$, où dS représente la variation d'aire du film (double). Quand l'aire S de ce film varie de dS, sous l'action du milieu extérieur, le système reçoit donc l'énergie :

$$\boxed{đW = \sigma\,dS} \qquad (3.7)$$

si $dS > 0$, $đW > 0$, conformément à nos conventions de signe.

— Considérons une pile réversible dans laquelle a lieu, par exemple, la réaction : $Cu + ZnSO_4 \rightleftarrows Zn + CuSO_4$ et dont la force électromotrice vaut E. Dans le montage de la figure 3.9c, on voit qu'il est aisé d'opposer à E une différence de potentiel externe E′ légèrement plus grande ou plus petite de manière à réaliser des transformations quasi-statiques de la pile.

Si E′ est très légèrement inférieure à E durant un court instant dt, la pile peut alors transférer, à travers le circuit extérieur, la charge infinitésimale $dq = -I\,dt$ de l'électrode positive (l'anode Cu) vers l'électrode négative (la cathode Zn). La pile, ayant débité, a perdu une partie de sa charge : $dq < 0$. Le travail qu'elle a fourni vaut $EI\,dt = -E\,dq$; le travail reçu par elle est donc :

$$\boxed{đW = E\,dq.} \qquad (3.8)$$

et il est bien négatif. Si $E' \geqslant E$, la source extérieure travaille et enrichit la charge de l'anode de q à $q + dq$: par suite le travail reçu par le système thermomécanique qu'est la pile réversible est toujours donné par (3.8).

Remarque générale. Tous ces travaux élémentaires apparaissent comme le produit d'une variable intensive (p, $\mathcal{C}$, σ, E) par la variation infinitésimale d'une variable extensive (V, l, S, q).

4.3 Quantités de chaleurs élémentaires

Il est bien entendu possible d'apporter ou de prendre de la chaleur à un système *sans fournir ou recevoir de travail :* c'est ce qui se passe dans les *systèmes thermiques.*

Exemple. On chauffe un fluide dont le piston du corps de pompe est immobilisé; il n'y a pas de déplacement, donc pas de travail, et le chauffage du système thermique s'effectue à volume constant.

Mais si l'on réchauffe ce même fluide, son piston étant libre, l'énergie ainsi transmise au système thermomécanique va servir à deux usages :

— élever la température du fluide,

— en changer le volume (dilatation) et fournir un travail contre l'extérieur.

On voit donc que si l'on admet que la quantité de chaleur échangée đQ est proportionnelle à la variation dT de la température du système, la constante de proportionnalité C appelée *capacité calorifique* du système et telle que :

$$\boxed{đQ = C\,dT,} \tag{3.9}$$

va dépendre de la *masse m* de fluide et du processus de *transformation* considéré.

Il ne faudrait cependant pas croire qu'un échange de chaleur s'accompagne toujours d'une variation de température :

Exemple. La fusion d'un bloc de glace en équilibre avec de l'eau liquide nécessite l'apport de chaleur; pendant cette fusion la température de l'eau, sous une pression normale, reste égale à 0 °C. (Nous avons d'ailleurs utilisé cette propriété pour considérer le mélange eau-glace comme un repère thermométrique.)

Dans un tel cas, la quantité de chaleur đQ à fournir au système est proportionnelle à la masse dm du corps transformé :

$$\boxed{đQ = l\,dm.} \tag{3.10}$$

le coefficient de proportionnalité dépendant là encore du *processus* considéré.

Nous reviendrons, de façon plus précise, sur les échanges de chaleur au paragraphe 4 du chapitre 4 traitant de la *calorimétrie.*

Exemple. Comme pour le travail đW, la chaleur élémentaire đQ dépend du chemin parcouru et n'est pas la différentielle d'une fonction d'état. Nous rappelons cette propriété en barrant le d de đQ.

5. LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE OU PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

Revenons à l'expression du travail élémentaire considéré au paragraphe 1 :

$$đW = \vec{F}_p \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{np} \cdot d\vec{r} = -dE_p - đQ,$$

où nous remplaçons le travail des forces extérieures dérivant de potentiels par la variation d'énergie potentielle — dE_p et celui des forces qui ne dérivent pas de potentiels par la variation de chaleur associée — đQ définie en (3.2).

Écrivant : $-dE_p = đW + đQ$, et considérant le cas d'un système thermomécanique fermé qui parcourt un cycle, nous avons :

$$\oint -dE_p = 0 = \oint đW + \oint đQ = W + Q,$$

soit : $\boxed{W + Q = 0, \quad \text{pour un cycle.}}$ (3.11)

Ce résultat constitue le *premier principe de la thermodynamique :*

> pour un système thermomécanique fermé, la somme du travail et de la quantité de chaleur fournis (ou reçus) par le système au cours d'un cycle est toujours nulle.

Un système isolé vérifie naturellement ce principe puisque $W = Q = 0$. Le résultat (3.11) contient aussi le *principe d'équivalence* travail-chaleur échangés au cours d'un cycle :

> si au cours d'un cycle, le système fermé reçoit du travail (resp. fournit), il fournit (resp. reçoit) la chaleur équivalente :
>
> $$W > 0 \longrightarrow Q < 0 \text{ (resp. } W < 0 \longrightarrow Q > 0).$$

4

LES APPLICATIONS DU PREMIER PRINCIPE

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

1. L'ÉNERGIE INTERNE. LE PRINCIPE DE L'ÉTAT INITIAL ET DE L'ÉTAT FINAL

Supposons, pour fixer les idées, un système hydrostatique fermé subissant une transformation l'amenant d'un état d'équilibre A à un autre état d'équilibre B par le chemin $\overset{\frown}{AC_1B}$ qui représente une suite quelconque d'états intermédiaires (fig. 4.1). Supposons, de plus, qu'il existe au moins une suite de transformations *réversibles* amenant le système de A en B selon le chemin $\overset{\frown}{ACB}$. Nous pouvons alors revenir de B en A par le chemin $\overset{\frown}{BCA}$.

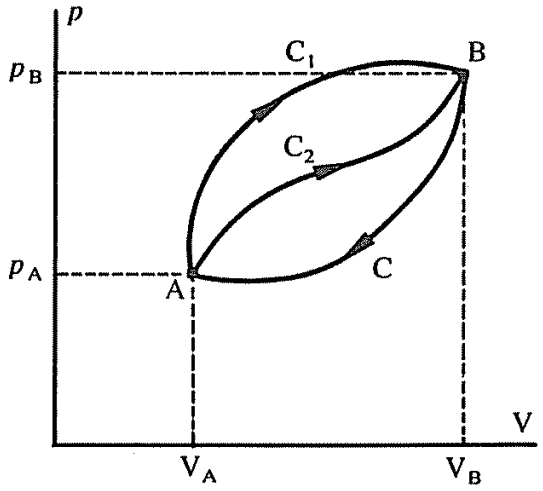


FIG. 4.1

Soit W_1 et Q_1, W et Q les travaux et chaleurs échangés par le système avec l'extérieur, respectivement pour les trajets $\overset{\frown}{AC_1B}$ et $\overset{\frown}{BCA}$. Pour le cycle $\overset{\frown}{AC_1BCA}$, le premier principe permet d'écrire :

$$(W_1 + Q_1) + (W + Q) = 0.$$

Si le système avait été de A en B selon $\overset{\frown}{AC_2B}$ quelconque en revenant en A par $\overset{\frown}{BCA}$, nous aurions de même :

$$(W_2 + Q_2) + (W + Q) = 0.$$

Comparant ces résultats, il vient : $W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2$.

> Ainsi, la somme $(W + Q)$ de l'énergie absorbée (ou fournie) par le système thermomécanique fermé est indépendante du chemin réellement parcouru, c'est-à-dire de la suite d'états du système joignant l'état initial à l'état final et de la réversibilité ou non-réversibilité des échanges énergétiques avec le milieu extérieur.

Ce principe dit de *« l'état initial et de l'état final »* nous conduit à définir *l'énergie interne* du système; soit U cette énergie dont les valeurs en A et B sont respectivement U_A et U_B. Alors, nous poserons :

$$\boxed{U_B - U_A = \Delta U = W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2.} \qquad (4.1)$$

L'énergie interne U, *déterminée uniquement par sa variation* ΔU, apparaît donc comme une *fonction d'état,* c'est-à-dire paramétrée par les variables thermomécaniques indépendantes du système : on dit aussi souvent que U est une *fonction thermodynamique.*

Les propriétés de U sont alors tout à fait similaires de celles de l'énergie potentielle décrites au paragraphe 7 du chapitre 6 (t. 1) :

— U est déterminée à une constante additive près;

— sa différentielle : $\boxed{dU = đW + đQ = đQ - p\ dV.}$ (4.2)

somme des variations énergétiques élémentaires đW et đQ est telle que $\oint dU = 0$ sur tout cycle : nous retrouvons là le résultat (3.11) du premier principe;

— si $dU = U_x\, dx + U_y\, dy$ où x et y sont des variables thermomécaniques indépendantes, on doit avoir :

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial x}. \qquad (4.3)$$

Cette relation ne s'applique généralement pas à W *et* Q puisque đW et đQ ne sont pas des différentielles au sens mathématique du terme.

Remarque. Si le système thermomécanique est isolé : $W = Q = 0$ implique $\Delta U = 0$; *l'énergie interne d'un système isolé est constante.*

Exemple de calcul de ΔU. Soit $m = 1$ kg de glace à 0 °C et sous pression normale ($p_0 = 1$ atm) : quelle est la variation d'énergie interne qui accompagne sa fusion totale, sachant que la glace en fondant subit une diminution relative de volume $\Delta V/V$ d'environ 9 % et qu'il faut fournir $l_f = 80$ calories pour fondre 1 gramme de glace?

On écrit : $\Delta U = W + Q = -p_0 \Delta V + m l_f$,

avec : $\Delta V = -0{,}09\ V = -0{,}09 \cdot 10^{-3}\ m^3$

(1 kg d'eau remplit $10^{-3}\ m^3$),

$$p_0 = 1\ atm = 1{,}013\,3 \cdot 10^5\ Pa,$$

soit : $\Delta U = +0{,}09 \cdot 10^{-3} \times 1{,}013\,3 \cdot 10^5 + 4{,}184 \times 10^3 \times 80 \sim 334\ kJ.$

On voit, dans cet exemple, que le travail des forces de pression ($-p_0 \Delta V \sim 9$ J) est négligeable devant la chaleur de changement d'état glace $\longrightarrow$ eau. Il n'en serait pas de même dans le changement d'état liquide $\longrightarrow$ vapeur, car la variation de volume associée est très grande.

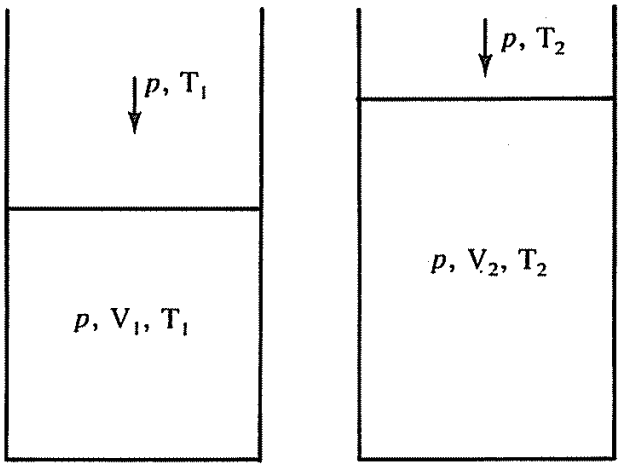
2. TRANSFORMATIONS ISOBARES ET ENTHALPIE

L'exemple précédent appartient à cette catégorie de transformations ainsi que tous les *changements d'état* que nous étudierons plus en détail au chapitre 6. Supposons en effet que l'expérimentateur *impose une pression extérieure* à un corps pur : en modifiant ensuite la température de ce corps, il peut observer certains changements d'état de ce corps, c'est-à-dire l'apparition d'équilibres de type : solide $\rightleftarrows$ liquide, liquide $\rightleftarrows$ vapeur, solide $\rightleftarrows$ vapeur. *Tant qu'un de ces équilibres existe, la température du système est constante :* ainsi tout l'échange de chaleur entre le milieu extérieur et le système qui se produit alors sert à modifier la nature physique du système sans en modifier la température.

Considérons maintenant un autre exemple. Soit un corps de pompe contenant une masse m de gaz en équilibre, de volume V_1 à la température T_1 et sous une pression p (fig. 4.2 a). Modifions la température extérieure ($T_2 > T_1$) et laissons le nouvel équilibre se réaliser : un transfert de chaleur spontané se produit du milieu extérieur (T_2) vers le gaz (T_1) si le corps de pompe n'est pas un isolant thermique; sous son effet, le gaz se dilate et passe du volume (V_1, T_1) au volume (V_2, T_2) en travaillant contre la pression d'équilibre p (fig. 4.2 b).

Au cours de cette transformation irréversible, on a :

$$U_2 - U_1 = \Delta U = -p(V_2 - V_1) + Q_p,$$



(a) FIG. 4.2 (b)

si Q_p désigne la quantité de chaleur transférée au système sous la pression constante p. Ce résultat s'écrit encore :

$$Q_p = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) = (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1).$$

Posant :

$$\boxed{H = U + pV,} \tag{4.4}$$

nous avons aussi :

$$\boxed{H_2 - H_1 = \Delta H = Q_p.} \tag{4.5}$$

La nouvelle *fonction thermodynamique* H, dont la différence entre l'état final et l'état initial mesure la chaleur absorbée par le système au cours d'une transformation isobare est l'*enthalpie* du système. Elle est définie à une constante additive près et sa variation élémentaire dH est une différentielle.

La définition (4.4) nous permet de calculer H pour une pression quelconque.

Dans une transformation infinitésimale réversible, on a :

$$dH = dU + d(pV) = dU + p\,dV + V\,dp.$$

Or, de (4.2), nous tirons : $dU + p\,dV = đQ$, d'où :

$$\boxed{dH = V\,dp + đQ.} \tag{4.6}$$

En particulier, pour une transformation isobare où $p =$ constante $\longrightarrow$ $dp = 0$, nous aurons :

$$\boxed{dH = đQ = dQ_p.} \tag{4.7}$$

La variation élémentaire de chaleur đQ, au cours d'une transformation isobare, est donc une différentielle dQ_p égale à la différentielle de l'enthalpie : *connaître la variation d'enthalpie d'un système, c'est connaître sa chaleur de transformation isobare.*

3. TRANSFORMATIONS ISOCHORES ET ÉNERGIE INTERNE

Pour une telle transformation, V = constante $\longrightarrow$ $dV = 0$: *le travail élémentaire* $đW = -p\,dV$ échangé entre le système et le milieu extérieur est *toujours nul.*

Exemple. Si dans l'exemple précédent nous immobilisons le piston, le transfert de chaleur se fait à volume constant sans travail contre l'extérieur.

Alors (4.1) donne :

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q_V, \tag{4.8}$$

en posant Q_V la chaleur transférée au système à volume constant. De (4.2), il vient aussi pour une transformation réversible :

$$\boxed{dU = đQ = dQ_V.} \tag{4.9}$$

La variation élémentaire de chaleur đQ, au cours d'une transformation isochore, est donc une différentielle dQ_V égale à la différentielle de l'énergie interne : *connaître l'énergie interne d'un système, c'est connaître sa chaleur de transformation à volume constant.*

4. CALORIMÉTRIE

Nous avons déjà souligné au paragraphe 4.3 du chapitre 3 que *les quantités de chaleurs élémentaires dépendent des processus de transformation considérés.* Nous venons, aux paragraphes 2 et 3, de le vérifier. La *calorimétrie* étant la mesure des quantités de chaleur, nous allons tout d'abord donner des définitions de certaines grandeurs qui lui sont propres, sans dire à quel processus elles se rattachent, puis nous préciserons ce que deviennent ces grandeurs pour un processus déterminé.

4.1 Définitions

1° *Capacité calorifique :* c'est la quantité de chaleur C nécessaire pour élever la température d'un corps d'un degré. Elle se mesure en joules $\cdot K^{-1}$ ou calories $\cdot deg^{-1}$.

Pour une variation dT de la température du corps, il faut une quantité de chaleur :

$$\boxed{đQ = C\,dT.} \tag{4.10}$$

Remarque. On l'appelle quelquefois *« valeur en eau »* car, mesurée en grammes, elle représente la masse d'eau qui aurait la même capacité calorifique. Par exemple, dire qu'un calorimètre a une masse en eau de 80 g signifie qu'il a la même capacité calorifique que 80 g d'eau.

2° *Chaleurs massiques.* La chaleur massique est la capacité calorifique de l'unité de masse du corps; on a :

$$\boxed{C = mc \quad \text{avec} \quad đQ = mc\,dT:} \tag{4.11}$$

c se mesure en $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ou $cal \cdot g^{-1} \cdot deg^{-1}$.

Lorsque l'unité de masse est la masse $\overline{M}$ d'une mole, on parle de *chaleur spécifique molaire* $\overline{c}$ et pour ν moles, on a :

$$\overline{c} = \overline{M}c \quad \text{avec} \quad đQ = \nu\overline{c}\,dT. \tag{4.12}$$

3° *Chaleurs latentes.* Pour un changement d'état, sans variation de température du corps, la quantité de chaleur đQ transférée à la masse dm de corps transformée lui est proportionnelle; on écrit :

$$\boxed{đQ = l\,dm:} \tag{4.13}$$

l est la *chaleur latente massique* mesurée en $J \cdot kg^{-1}$ ou $cal \cdot g^{-1}$; rapportée à une mole, $\bar{l}$ prend le nom de *chaleur latente molaire,* et pour $d\nu$ moles on a :

$$\bar{l} = \overline{M} l \quad \text{avec} \quad dQ = \bar{l}\, d\nu. \tag{4.14}$$

4.2 Postulat de la calorimétrie

La calorimétrie excluant le transfert de travail mécanique entre le système thermomécanique et le milieu extérieur — c'est-à-dire s'intéressant en fait uniquement à l'aspect thermique de cet ensemble — postule que *si, au cours d'un processus donné, le système reçoit la chaleur* Q_S *du milieu extérieur, celui-ci reçoit* $Q_e = -Q_S$.

Ce postulat de conservation de la chaleur ne mérite pas ce nom puisqu'il résulte simplement de l'application du premier principe au *système isolé* que constitue l'ensemble système thermique – milieu extérieur :

$$W = Q = 0.$$

De $Q = Q_S + Q_e = 0$, en supposant le calorimètre isolé de l'extérieur, il vient enfin $Q_S = 0$.

Si $T_1 < T_2$ sont les températures des masses m_1 et m_2 mises en contact dans un calorimètre — nécessaire pour que l'ensemble (m_1, m_2) constitue un système isolé — et $T(T_1 < T < T_2)$ la température finale de l'équilibre thermique ainsi réalisé, on écrira :

$$Q_1 + Q_2 = m_1 c_1 (T - T_1) + m_2 c_2 (T - T_2) = 0,$$

soit :

$$\boxed{m_2 c_2 (T_2 - T) = m_1 c_1 (T - T_1).} \tag{4.15}$$

c_1 et c_2 étant les chaleurs massiques pour le processus considéré; (4.15) constitue l'équation de base de la calorimétrie.

4.3 Chaleurs massiques des gaz

Comme il est possible d'opérer sur un gaz à pression ou à volume constant, on envisagera les chaleurs massiques c_p et c_V correspondantes.

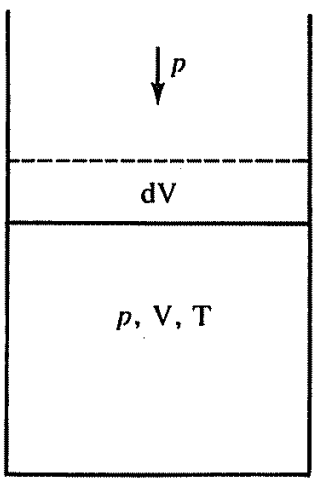


FIG. 4.3

1° *Chaleur massique à pression constante.* Enfermons une masse m de gaz dans un corps de pompe dont le piston, libre de se déplacer, est soumis à une pression p constante (fig. 4.3). Une fois l'équilibre réalisé à la température T, il faut fournir au gaz la quantité de chaleur dQ_p pour élever sa température de T à T + dT, avec :

$$dQ_p = mc_p\, dT, \quad (p = C^{te}),$$

d'où :

$$\boxed{c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p.} \tag{4.16}$$

Puisque selon (4.7), $dQ_p = dH$, $dQ_p/dT = dH/dT$ à $p = C^{te}$, soit $(\partial H/\partial T)_p$.

c_p *est généralement fonction de* T : ainsi pour l'hydrogène, de 300 à 1 500 K, $c_p(H_2) = 3{,}495 - 0{,}101 \cdot 10^{-3}\, T + 0{,}243 \cdot 10^{-6}\, T^2$ cal · K^{-1} · g^{-1}.

2° *Chaleur massique à volume constant.* Bloquons le piston de la figure 4.3 et élevons la température, à volume constant, de T à T + dT. Sa pression va naturellement augmenter. Pour réaliser cet échauffement, il faut fournir au gaz la quantité de chaleur :

$$dQ_V = mc_V\, dT, \quad (V = C^{te}),$$

d'où :

$$\boxed{c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.} \tag{4.17}$$

Comme (4.8) implique $dQ_V = dU$ (à $V = C^{te}$), on a $dQ_V/dT = dU/dT$ à $V = C^{te}$, soit $(\partial U/\partial T)_V$.

c_V *est généralement fonction de* T *et toujours plus petit que* c_p *:* pour élever la température de T à T + dT d'une même masse de gaz, dQ_p doit apporter en plus de dQ_V, l'énergie nécessaire au gaz pour travailler contre l'extérieur en se dilatant.

On trouvera au paragraphe 11, quelques données numériques concernant les chaleurs spécifiques des gaz les plus courants.

4.4 Chaleurs massiques des phases condensées (liquides et solides)

Chauffons un solide ou un liquide (de masse m), à la *pression extérieure* p supposée constante, et amenons sa température de T à T + dT :

— de $dU = đQ - p\, dV$, on tire $đQ = dU + p\, dV$ et comme la dilatation d'une phase condensée est toujours très faible : $dV = 0$, c'est-à-dire $V = C^{te} \longrightarrow đQ = dU$;

— de $dH = đQ + V\, dp$, on tire $đQ = dH - V\, dp = dH$ puisque $p = C^{te}$.

Ainsi, pour une phase condensée, on aura :

$$đQ = mc\, dT = dU, \quad (V = C^{te}),$$
$$= dH, \quad (p = C^{te}),$$

soit :

$$\boxed{c = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p.} \tag{4.18}$$

Dans cette approximation, il n'y a pas de différence entre chaleurs massiques à pression et volume constants. Nous avons indiqué dans le tableau 1 — quelques valeurs de $\bar{c}$ pour des métaux et des liquides organiques courants à 20 °C; on remarquera que la chaleur spécifique molaire des métaux, à la température ordinaire, est voisine de $25\ J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$ ($6\ cal \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$) : cela constitue la *loi approchée de Dulong et Petit pour les métaux.*

Tableau 1.

Métaux	$\bar{c}$ ($J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)	$\bar{c}$ ($cal \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)	Liquides	$\bar{c}$ ($J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)	$\bar{c}$ ($cal \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)
Al	24,2	5,78	benzène	132,6	31,7
Ag	25,2	6,02	eau	75,3	18,0
Cu	24,5	5,85	éthanol	111,7	26,7
Fe	25,1	5,99	éther	167,4	40,0
Hg	27,9	6,66			
Pb	26,5	6,34			

LE GAZ PARFAIT

5. LOI DE JOULE ET RELATION DE MAYER

Décrivons maintenant l'expérience que Joule fit sur un gaz à pression quelconque (fig. 4.4) : initialement le gaz est enfermé dans un réservoir R_1 relié par un robinet (r) à un réservoir vide R_2, le tout étant immergé dans un calorimètre à la température T_0. En ouvrant le robinet, le gaz se détend *irréversiblement* de R_1 vers R_2 et finit par occuper les deux réservoirs sous

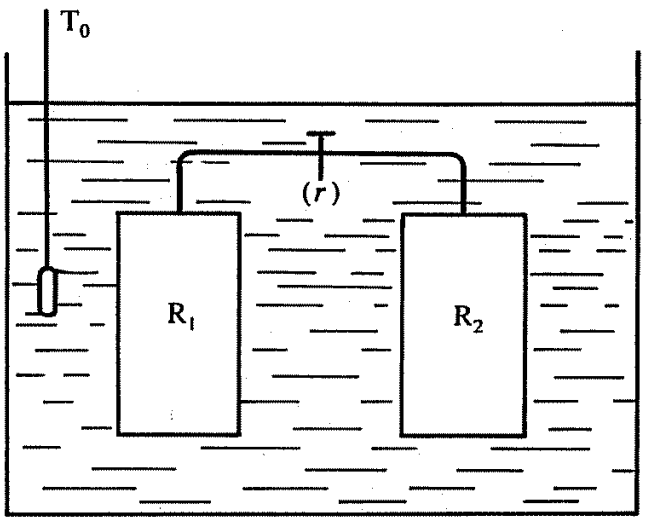


FIG. 4.4

la même pression. La mesure de la température montre qu'*au cours de cette détente la température* T_0 *du calorimètre n'a pas variée.* Il n'y a donc eu aucun échange de chaleur avec l'extérieur ($Q = 0$) et naturellement aucun travail contre le milieu extérieur ($W = 0$).

Aussi si U_1 représente l'énergie interne du gaz dans l'état initial, U_2 sa valeur dans l'état final, on a :

$$\Delta U = W + Q = U_2 - U_1 = 0,$$

soit :

$$\boxed{U_2 = U_1 = \text{constante}, \quad T_0 = \text{constante}.} \qquad (4.19)$$

Ce résultat obtenu par Joule, dans des conditions expérimentales peu précises, ayant été confirmé pour les gaz de comportement parfait ($p \longrightarrow 0$), on voit donc que l'énergie interne d'une masse m donnée de gaz parfait ne dépend pas du volume V que ce gaz occupe. Comme $pV = \nu RT_0$, elle ne dépend pas non plus de la pression p sous laquelle se trouve le gaz.

En conclusion, seule la température T ayant été fixée, on obtient l'énoncé de la *loi de Joule :*

> L'énergie interne d'une masse donnée de *gaz parfait* ne dépend que de sa température.

La *définition complète du gaz parfait* suppose donc :

— qu'*il obéit à la loi* $pV = \nu RT$, expression de son équation d'état,
— que *son énergie interne ne dépend que de la température.*

Comme $c_V = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ pour un gaz quelconque, U ne dépendant que de T pour un gaz parfait, il en résulte que la chaleur massique à volume constant du gaz parfait a la même propriété.

Il en sera aussi ainsi pour $H = U + pV = U + \nu RT$ et $c_p = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_p$.

> Pour un gaz parfait, U et H ne dépendent que de T. Il en est de même pour c_V et c_p.

On a de plus les relations différentielles :

$$\begin{aligned} dU &= C_V\,dT = mc_V\,dT = \nu\bar{c}_V\,dT, \\ dH &= C_p\,dT = mc_p\,dT = \nu\bar{c}_p\,dT, \end{aligned} \qquad (4.20)$$

à partir desquelles, connaissant les chaleurs massiques en fonction de T, il est possible de calculer U et H à une température quelconque.

De (4.20), $dU = đQ - p\,dV$ et $dH = đQ + V\,dp$, il résulte :

$$\boxed{\begin{aligned} đQ &= C_V\,dT + p\,dV, \\ đQ &= C_p\,dT - V\,dp, \end{aligned}} \qquad (4.21)$$

formes différentielles définissant de façon précise, pour le gaz parfait, les échanges de chaleur dans une transformation réversible.

Enfin, $H = U + pV = U + \nu RT$ devient pour une mole : $\overline{H} = \overline{U} + RT$: sa dérivation par rapport à T donne la *relation de Mayer :*

$$\boxed{\overline{c}_p - \overline{c}_V = R,} \qquad (4.22)$$

qui établit deux résultats pour le gaz parfait :

— $\overline{c}_p > \overline{c}_V$ comme nous l'avions remarqué au paragraphe 4.3;

— il est inutile de déterminer $\overline{c}_p$ et $\overline{c}_V$ puisque $\overline{c}_p$ ou $\overline{c}_V$ et (4.22) suffisent.

6. APPLICATION AUX CHALEURS DE RÉACTION

Quand, par exemple, l'hydrogène se combine à l'oxygène pour donner de l'eau, tous les corps étant considérés à l'état gazeux, la réaction est dite *exothermique,* c'est-à-dire qu'elle s'accompagne d'un dégagement de chaleur perdu par le système chimique au profit de milieu extérieur ($Q_p < 0$). Ainsi, à la pression normale, on aura :

$$H_2(g) + \frac{1}{2}\,O_2(g) \longrightarrow H_2O(g) + Q_p = -59{,}2 \text{ kcal.}$$

Il est également possible d'envisager des réactions *endothermiques* à pression constante ($Q_p > 0$) ainsi que des réactions à volume constant — lorsqu'elles sont effectuées dans une bombe calorimétrique — caractérisées par Q_V.

Une même réaction peut généralement s'effectuer à volume ou à pression constante, mais la chaleur échangée avec le milieu extérieur peut être plus facile à mesurer d'une manière que de l'autre : aussi est-il nécessaire de savoir calculer l'une des chaleurs quand on a mesuré l'autre.

Soit un système chimique dont la phase gazeuse en état d'équilibre occupe le volume V_0 sous la pression extérieure p_0 à la température T_0; ce système est susceptible de se transformer par une *réaction chimique isotherme.*

1° La réaction peut être effectuée à volume constant V_0 (il suffit qu'elle soit réalisée dans un corps de pompe dont le piston est bloqué), et à la température T_0 (le corps de pompe étant immergé dans un calorimètre). Après réaction, le système est donc passé de l'état initial (p_0, V_0, T_0) à l'état final (p, V_0, T_0), et comme il n'y a pas eu de travail contre l'extérieur :

$$\Delta U_1 = Q_V + 0 = Q_V.$$

2° Elle peut aussi s'effectuer à pression constante p_0 et à la température T_0; on passe donc de l'état initial (p_0, V_0, T_0) à l'état (p_0, V, T_0) avec :

$$\Delta U_2 = Q_p + W = Q_p - p_0 \Delta V = Q_p - p_0(V - V_0).$$

Le travail des phases condensées — s'il y en a — est négligeable car leurs variations de volume sont toujours très faibles devant celles des gaz.

Pour revenir à l'état final (p, V_0, T_0), il suffit de *comprimer* ou *détendre* les gaz de manière isotherme *sans réaction chimique supplémentaire :* au cours de cette transformation isotherme, si *les gaz sont supposés parfaits,* la loi de Joule entraîne que l'énergie interne ne varie pas.

Étant partis de l'état (p_0, V_0, T_0) et arrivés à l'état (p, V_0, T_0) par deux transformations différentes, nous avons : $\Delta U_1 = \Delta U_2$, d'où :

$$\boxed{Q_p = Q_V + p_0 \Delta V.} \qquad (4.23)$$

Les gaz étant supposés parfaits, dans l'état (p_0, V_0, T_0), on écrit :

$$p_0 V_0 = \nu_1 R T_0,$$

si ν_1 est le nombre initial de moles de gaz. Dans l'état (p_0, V, T_0), on aura, après réaction chimique :

$$p_0 V = \nu_2 R T_0,$$

où ν_2 est le nouveau nombre de moles de gaz. Alors :

$$p_0 \Delta V = p_0(V - V_0) = (\nu_2 - \nu_1) RT = (\Delta \nu) RT_0,$$

et (4.23) s'écrit aussi :

$$\boxed{Q_p = Q_V + (\Delta \nu) RT_0,} \qquad (4.24)$$

$\Delta \nu$ étant la variation du nombre de moles gazeuses au cours de la réaction effectuée à la température T_0.

Exemples.

- $2C(s) + O_2(g) \longrightarrow 2CO(g)$, $\quad \Delta \nu = 2 - 1 = 1$;
- $H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) \longrightarrow H_2O(l)$, $\quad \Delta \nu = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$;
- $As_2O_3(s) + 2O_3(g) \longrightarrow As_2O_5(s) + 2O_2(g)$, $\quad \Delta \nu = 2 - 2 = 0$.

7. TRANSFORMATIONS ISOTHERMES

Une transformation *isotherme* est *quasi-statique* (§ 3.6 du chap. 3) : la pression p, à tout instant, est donc telle que si on passe d'un état (p_1, V_1) à un état (p_2, V_2), on a : $pV = p_1V_1 = p_2V_2 = \nu RT$, à la température T.

Alors : $đW = -p\, dV = -p_1V_1\, dV/V$ nous donne :

$$W = -p_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -p_1V_1 [\text{Log } V]_{V_1}^{V_2} = p_1V_1 \text{ Log}(V_1/V_2),$$

ou encore :

$$W = p_1V_1 \text{ Log}(p_2/p_1) = \nu RT \text{ Log}(p_2/p_1),$$

$$\boxed{W = p_1 V_1 \text{ Log}(V_1/V_2) = \nu RT \text{ Log}(V_1/V_2) = \nu RT \text{ Log}(p_2/p_1).} \tag{4.25}$$

Le gaz étant parfait, au cours d'une transformation isotherme $\Delta U = 0$ et $W + Q = 0 \longrightarrow Q = -W$;

$$\boxed{\Delta U = 0, \quad Q = -W.} \tag{4.26}$$

8. TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES

Par définition, une transformation sans échange de chaleur avec le milieu extérieur ($Q = 0$, $\Delta U = W$) est dite *adiabatique* (§ 3.6 du chap. 3) : *elle pourra être* aussi bien *irréversible* que *réversible.*

L'intérêt des transformations adiabatiques est que l'on considère comme telles les transformations suffisamment rapides pour que les échanges de chaleur avec le milieu extérieur soient négligeables (bombe calorimétrique, explosion, ...).

Puisque les transformations quasi-statiques sont nécessairement lentes (§ 3.4 du chap. 3), il doit en être de même pour les transformations adiabatiques réversibles, ces transformations étant toutefois assez rapides pour que les échanges avec l'extérieur n'aient pas le temps de prendre une valeur appréciable.

8.1 Transformations réversibles

Considérons une mole de gaz parfait dans l'état $(p, \overline{V}, T)$. Pour la transformation adiabatique *réversible* l'amenant à $(p + dp, \overline{V} + d\overline{V}, T + dT)$, on a, selon (4.21) :

$$đQ = 0 = \overline{c}_V \, dT + p \, d\overline{V} = \overline{c}_p \, dT - \overline{V} \, dp,$$

d'où l'on tire :

$$dT = -\frac{1}{\overline{c}_V} p \, d\overline{V} = \frac{1}{\overline{c}_p} \overline{V} \, dp,$$

soit :

$$\left(\frac{\overline{c}_p}{\overline{c}_V}\right) \frac{d\overline{V}}{\overline{V}} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Posons :

$$\boxed{\gamma = \overline{c}_p / \overline{c}_V > 1.} \tag{4.27}$$

et remarquons que $d\overline{V}/\overline{V} = dV/V$ *si* $V = \nu\overline{V}$ est le volume d'une masse quelconque de gaz parfait; la transformation étant réversible, p et V sont déterminés à tout instant, et nous pouvons intégrer l'équation différentielle précédente si $\gamma = C^{te}$:

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = \gamma \text{ d Log V} + \text{d Log } p = 0 \longrightarrow \gamma \text{ Log V} + \text{Log } p = \text{Log}(C^{te}),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{p V^\gamma = \text{constante.}} \tag{4.28}$$

En combinant $pV/T = \text{constante}$ avec (4.28), on obtient encore :

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \quad p^{(\gamma-1)/\gamma}T = \text{constante}. \tag{4.29}$$

Ainsi, au cours d'une transformation adiabatique réversible, le gaz parfait vérifie *simultanément* l'équation d'état $pV = rT$ et une des relations ci-dessus.

Remarques. • Une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait s'accompagne toujours d'une variation de la température du gaz d'après (4.28 et 4.29); il ne faut donc pas confondre *échange de chaleur* (ici $đQ = 0$) et *variation de température* (ici $dT \neq 0$) comme cela était déjà apparu dans les paragraphes 2 et 4.

• Une détente adiabatique ($V_2 > V_1$) produit toujours, pour un gaz parfait, un abaissement de température ($T_2 < T_1$) car $\gamma > 1$; cette remarque trouve son application dans l'industrie cryogénique de la liquéfaction des gaz.

Supposons que la transformation adiabatique réversible fasse passer le système de l'état (p_1, V_1, T_1) à l'état (p_2, V_2, T_2). On a :

$$pV^{\gamma} = p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma},$$

d'où :
$$đW = -p\,dV = -p_1V_1^{\gamma}\frac{dV}{V^{\gamma}} = -p_1V_1^{\gamma}(V^{-\gamma}\,dV),$$

et :

$$W = p_1V_1^{\gamma}\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{\gamma-1}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1V_1^{\gamma}}{\gamma-1}(V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma-1}.$$

Comme : $p_2V_2 = \nu RT_2$, $p_1V_1 = \nu RT_1$, on a aussi :

$$W = \frac{\nu R}{\gamma-1}(T_2 - T_1).$$

Finalement, $Q = 0$ entraîne $\Delta U = W$.

$$\boxed{\Delta U = W = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma-1} = \frac{\nu R}{\gamma-1}(T_2 - T_1), \quad Q = 0.} \tag{4.30}$$

8.2 Diagramme de Clapeyron d'une isotherme et d'une adiabatique

Le graphe d'une application $V \longrightarrow p$ porte, en thermodynamique, le nom de *diagramme de Clapeyron*. Pour une mole de gaz parfait, à température constante, on a $p\overline{V} = C^{te}$ et ce diagramme est une hyperbole équilatère (fig. 4.5).

En un point $P(\overline{V}_1, p_1)$ de cette isotherme, nous pouvons calculer la pente de sa tangente (D_T) :

$$p'_T(\overline{V}_1) = -\frac{RT}{\overline{V}_1^2} = -\frac{p_1}{\overline{V}_1}.$$

Pour ce même point, la pente de la tangente (D_Q) à l'adiabatique $p\overline{V}^\gamma = p_1\overline{V}_1^\gamma$ sera :

$$p'_Q(\overline{V}_1) = -\gamma \frac{p_1\overline{V}_1^\gamma}{\overline{V}_1^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p_1}{\overline{V}_1}.$$

Ainsi, nous avons au même point P :

$$p'_Q(\overline{V}_1) = \gamma p'_T(\overline{V}_1) < 0.$$

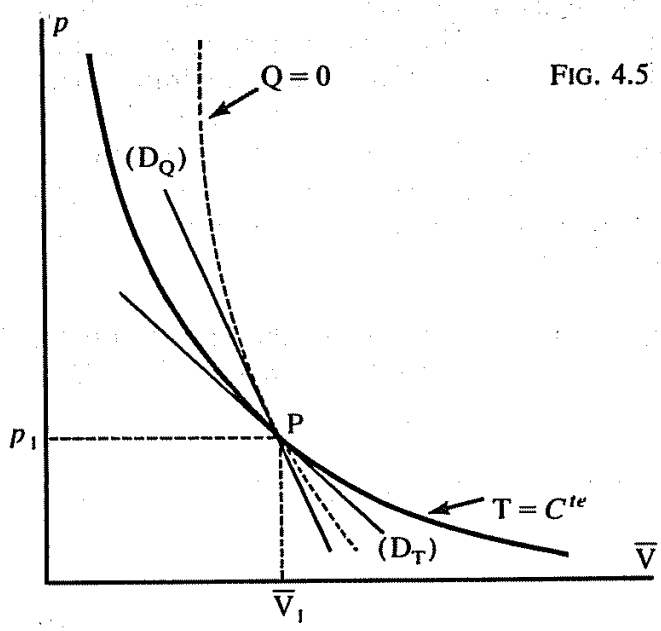


FIG. 4.5

Comme $\gamma > 1$, la pente de la tangente à l'adiabatique au point P est toujours plus grande — en valeur absolue — que celle de l'isotherme correspondante.

9. TRANSFORMATIONS QUELCONQUES

9.1 Formule générale

Si (p_1, V_1, T_1) et (p_2, V_2, T_2) sont des états d'équilibre du gaz parfait, nous pouvons calculer la variation d'énergie interne de ce gaz *pour une transformation quelconque (quasi-statique ou non).* En ne tenant compte que du premier principe, nous écrirons, pour une mole :

$$d\overline{U} = \overline{c}_V\, dT \longrightarrow \Delta\overline{U} = \overline{c}_V(T_2 - T_1).$$

Comme : $\overline{c}_p - \overline{c}_V = R$ et $\overline{c}_p/\overline{c}_V = \gamma$,

on a aussi :

$$\overline{c}_V\left(\frac{\overline{c}_p}{\overline{c}_V} - 1\right) = \overline{c}_V(\gamma - 1) = R \longrightarrow \overline{c}_V = \frac{R}{\gamma - 1},$$

et finalement, puisque : $p_1\overline{V}_1 = RT_1$, $p_2\overline{V}_2 = RT_2$:

$$\boxed{\Delta\overline{U} = \overline{c}_V(T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1}} \qquad (4.31)$$

Nous retrouvons bien entendu le résultat précédent alors que le calcul de W et Q n'aurait pas été possible puisque pour une transformation quelconque p, V et T ne sont pas définis.

9.2 Application aux transformations isobares

Soit une mole de gaz parfait passant de l'état $(p_0, \overline{V}_1, T_1)$ à l'état $(p_0, \overline{V}_2, T_2)$ par une transformation isobare. A pression constante, on a :

$$\overline{Q}_p = \Delta\overline{H} = \overline{c}_p(T_2 - T_1),$$

et :

$$\Delta\overline{U} = \overline{W} + \overline{Q}_p = \overline{c}_V(T_2 - T_1),$$

d'où l'on tire :

$$\overline{W} = \overline{c}_V(T_2 - T_1) - \overline{c}_p(T_2 - T_1) = -R(T_2 - T_1) = -p_0(\overline{V}_2 - \overline{V}_1),$$

que la transformation soit *réversible ou non.*

$$\boxed{\Delta\overline{U} = (\overline{c}_p - R)(T_2 - T_1),\ \overline{W} = -R(T_2 - T_1) = -p_0(\overline{V}_2 - \overline{V}_1),\ \overline{Q}_p = \Delta\overline{H} = \overline{c}_p(T_2 - T_1).} \qquad (4.32)$$

9.3 Application aux transformations isochores

Considérons une mole de gaz parfait, passant de $(p_1, \overline{V}_0, T_1)$ à $(p_2, \overline{V}_0, T_2)$ à volume constant : il n'y a pas de travail contre l'extérieur $(\overline{W} = 0)$ et, que la transformation soit *réversible ou non :*

$$\boxed{\Delta\overline{U} = \overline{Q}_V = \overline{c}_V(T_2 - T_1), \quad \overline{W} = 0.} \qquad (4.33)$$

10. THÉORIE CINÉTIQUE ET CHALEURS MASSIQUES MOLAIRES DU GAZ PARFAIT

Nous avons établi au paragraphe 7 du chapitre 2 que l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule de gaz parfait, à la température T, s'écrit :

$$\langle e_c^t \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (k = R/N_A).$$

Cette énergie cinétique de translation étant la seule forme d'énergie permise dans le modèle microscopique du gaz parfait (*cf.* chap. 1), l'énergie interne d'une mole de gaz parfait s'identifie avec l'énergie cinétique totale de toutes les molécules contenues dans cette mole :

$$\boxed{\overline{U} = N_A\left(\frac{3}{2} kT\right) = \frac{3}{2} RT.} \qquad (4.34)$$

Nous retrouvons la loi expérimentale de Joule puisque $\overline{U}$ ne dépend que de T. De plus, nous observons que $\overline{U} = 0$ à $T = 0$: la théorie cinétique du

gaz parfait établit donc que, pour ce gaz, l'énergie interne n'est pas déterminée à une constante additive près car cette constante doit être nulle.

Différentions $\overline{U}$: $d\overline{U} = \frac{3}{2} R\,dT \longrightarrow \overline{c}_V = \frac{3}{2} R$ et $\overline{c}_p = \frac{5}{2} R$, puisque $\overline{c}_p - \overline{c}_V = R$.

Ainsi, pour une mole de gaz parfait :

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{c}_V = \frac{3}{2} R = 12{,}47\ J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}\ (2{,}98\ cal \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}), \\ &\overline{c}_p = \frac{5}{2} R = 20{,}78\ J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}\ (4{,}97\ cal \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}), \\ &\gamma = \overline{c}_p / \overline{c}_V = 5/3 = 1{,}667. \end{aligned}} \quad (4.35)$$

Ces résultats, à l'expérience, se révèlent exacts pour les *gaz monoatomiques* (voir le tableau 2 du § 11) et faux pour les autres gaz. Cela se comprend aisément : $\frac{3}{2} RT$ représente l'énergie cinétique moyenne de translation du gaz parfait; or, celle-ci n'est égale à l'énergie interne molaire que pour un gaz dont les molécules ne possèdent pas d'autres moyens d'emmagasiner de l'énergie.

C'est le cas pour les gaz monoatomiques comme les gaz rares sous faible pression (He, A, Xe, ...).

11. L'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE ET SES CONSÉQUENCES

11.1 Le gaz parfait monoatomique

Considérons une molécule de gaz parfait dans le référentiel orthonormé (O; *xyz*) de $\mathcal{E}$; sa vitesse $\vec{v}$ instantanée a pour composantes v_x, v_y, v_z et son énergie cinétique moyenne de translation est la somme des énergies moyennes correspondantes selon *x*, *y* et *z* : $\langle e_c^t \rangle = \langle e_c \rangle_x + \langle e_c \rangle_y + \langle e_c \rangle_z$; toutes les directions de translation étant équiprobables dans $\mathcal{E}$ pour cette molécule, il en résulte l'égalité, en moyenne, de l'énergie de translation selon *x*, *y*, *z* pour la molécule : $\langle e_c \rangle_x = \langle e_c \rangle_y = \langle e_c \rangle_z$; alors :

$$\langle e_c^t \rangle = 3\langle e_c \rangle_x = \frac{3}{2} kT \longrightarrow \langle e_c \rangle_x = \langle e_c \rangle_y = \langle e_c \rangle_z = \frac{1}{2} kT.$$

Ce résultat, qui constitue le *principe de l'équipartition de l'énergie,* s'énonce :

> à chaque degré de liberté de translation est associé l'énergie cinétique moyenne par molécule $\langle e \rangle = \frac{1}{2} kT$.

Pour une mole de gaz parfait, on a évidemment :

$$\overline{U} = N_A(3\langle e \rangle) = \frac{3}{2} N_A kT = \frac{3}{2} RT.$$

11.2 Le gaz parfait diatomique

Soit maintenant une molécule de gaz parfait constituée de deux atomes assimilables à deux particules séparées par la distance 1-2 : à côté des trois degrés de liberté de *translation* du centre de masse C de cette molécule, il faudra également considérer ceux associés à sa *rotation* et aux vibrations *intra-atomiques* éventuelles.

1° Supposons les atomes légers (H, C, O, N) : à température ordinaire, les molécules, qui comme H_2, O_2, CO sont rigides (distance 1-2 = constante), ont :

— *trois degrés* de liberté de *translation,*

— *deux degrés* de liberté de *rotation.*

[Si l'on suppose l'axe 1-2 confondu avec $y'y$ (fig. 4.6), seules les rotations de la molécule autour de $x'x$ et $z'z$ ont un sens car les atomes 1 et 2 sont ponctuels.]

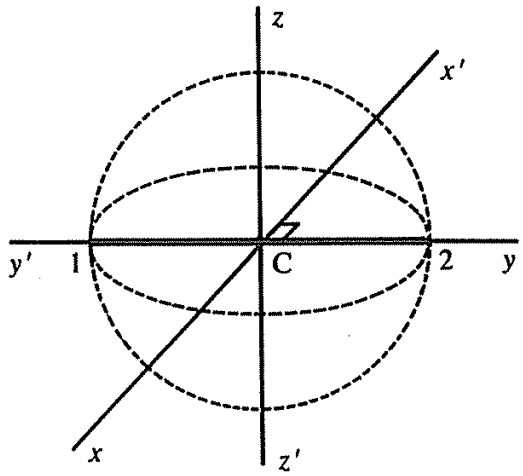


FIG. 4.6

2° Si on élève la température T ou augmente la masse des atomes 1 et 2 (Cl, Br, ...); aux cinq degrés de liberté précédents, il faut en ajouter *deux,* dus à la mise en mouvement des atomes 1 et 2, par *vibration* selon la liaison 1-2 : l'un provient de l'*énergie cinétique* moyenne de *vibration,* l'autre de l'*énergie potentielle.* A titre d'illustration, la figure 4.7 montre le comportement de la chaleur spécifique molaire $\overline{c}_p$ de l'hydrogène en fonction de la température T.

Si l'on associe $\frac{1}{2}kT$ à chaque degré de liberté, on obtient ainsi pour *l'énergie interne* d'une mole de gaz parfait :

$$\boxed{\overline{U} = \frac{i}{2} RT,} \qquad (4.36)$$

avec $i = i_t + i_r + i_v$, $i_t = 3$, $i_r = 2$, $i_v = 2$, et pour les chaleurs spécifiques molaires :

$$\boxed{\bar{c}_V = \frac{i}{2}\,R, \quad \bar{c}_p = \left(\frac{i+2}{2}\right)R, \quad \gamma = 1 + \frac{2}{i}\cdot} \tag{4.37}$$

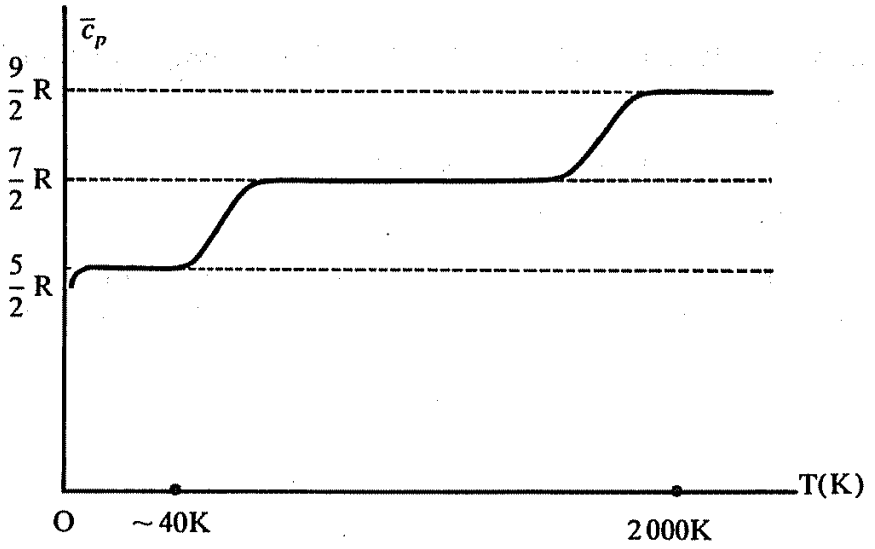


FIG. 4.7

On peut comparer la théorie précédente aux données expérimentales rassemblées dans le tableau 2.

Tableau 2.

Gaz	t(°C)	$\bar{c}_p$ (théor) ($J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)	$\bar{c}_p$ (exp) ($J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}$)	γ (théor)	γ (exp)
He	−180		20,9		1,660
A	+ 15		21,0		1,668
Kr	+ 19	20,8		1,667	1,68
Xe	+ 19				1,64
H_2	+ 15		28,4		1,410
O_2	+ 15	29,0	29,2	1,400	1,401
N_2	+ 15		29,0		1,404
CO	+ 15		29,0		1,404
O_2	+2000		35,7		1,303
H_2	+2000	37,3	34,2	1,286	1,318
Cl_2	+ 15		34,1		1,355

L'accord est bon dans l'ensemble mais, en fait, la généralisation de l'application du principe de l'équipartition de l'énergie aux molécules de plus de deux atomes (et ayant donc plus de deux degrés de liberté de vibration) ne donne pas de résultats corrects. De plus, aux très basses températures ($\leqslant 40$ K), l'hydrogène — gaz diatomique — se comporte comme un gaz monoatomique de chaleurs spécifiques molaires $\overline{c}_p = \frac{5}{2}\,\mathrm{R}$ et $\overline{c}_\mathrm{V} = \frac{3}{2}\,\mathrm{R}$, comme si la rotation moléculaire était gênée quand la température décroît (fig. 4.7).

Seule la mécanique quantique permet d'expliquer les résultats expérimentaux et leurs désaccords avec la théorie ci-dessus.

11.3 Loi de Dulong et Petit

Dans un métal, à l'état solide, l'agitation thermique fait osciller les atomes autour de positions moyennes; ceux-ci se comportent alors comme des oscillateurs harmoniques à trois dimensions avec six degrés de liberté (trois pour l'énergie cinétique et trois pour l'énergie potentielle). Par suite, pour une mole de métal :

$$\overline{\mathrm{U}} = N_A \times 6\left(\frac{1}{2}\,k\mathrm{T}\right) = 3\mathrm{RT} \quad \text{et} \quad \overline{c} = 3\mathrm{R} = 24{,}9\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mole^{-1}}.$$

Nous retrouvons la loi expérimentale de Dulong et Petit signalée au paragraphe 4.4.

5

SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE ET ENTROPIE

1. LES ÉNONCÉS DU SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1.1 Principe d'évolution

Jusqu'à présent, dans l'utilisation du principe d'équivalence, par exemple sous sa forme de principe de l'état initial et de l'état final, nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir comment une transformation donnée pouvait réellement se produire.

Considérons un gramme de nitroglycérine dans un certain état A : son explosion irréversible — car quasiment spontanée — fournit un état B. Il nous est évidemment théoriquement possible de récupérer les produits gazeux de l'explosion et de mesurer l'énergie libérée lors de la transformation A $\longrightarrow$ B. Le premier principe affirme alors qu'en partant de ces gaz (état B) et en fournissant au système l'énergie précédente, on peut réobtenir l'état A, c'est-à-dire le gramme d'explosif. Chacun sait que si la transformation A $\longrightarrow$ B est hautement probable, il n'en est pas de même pour son inverse B $\longrightarrow$ A.

Il devient donc nécessaire d'énoncer un principe fixant le sens de l'*évolution* des systèmes thermomécaniques que nous sommes amenés à étudier. Ce principe d'évolution — *second principe de la thermodynamique* — peut prendre la forme suivante :

> si un changement peut se produire spontanément, l'inverse de ce changement n'a jamais lieu.

A fin d'illustration, reprenons par exemple l'expérience de Joule (§ 1 du chap. 3) : au cours de la *descente spontanée du poids* Mg, le milieu extérieur qui travaille fournit par unité de temps la chaleur $\dot{Q}$ au récipient

plein d'eau dont la température T s'accroît. Sous la forme ci-dessus, le principe énonce qu'*il est impossible de remonter le poids* en refroidissant l'eau, et donc en diminuant sa température c'est-à-dire *réaliser un travail en empruntant de la chaleur à une seule source de chaleur.*

1.2 Énoncé de Thomson (Kelvin)

La généralisation de ce résultat ne serait pas tout à fait exacte; enfermons, par exemple, une certaine masse d'air à 0 °C dans un corps de pompe calorifugé : cette masse d'air peut se détendre de manière adiabatique — sans échange de chaleur avec le milieu extérieur mais en produisant du travail; comme l'expérience montre que l'air s'est refroidi au cours de la détente, nous pouvons le réchauffer en le mettant au contact de l'eau liquide à 0 °C, donc en congelant une certaine masse de cette eau. Se réchauffant, le gaz va se dilater et fournir encore un travail supplémentaire. En définitive, nous avons bien produit du travail en empruntant de la chaleur à une seule source; mais ce processus ne pourra pas être poursuivi car pour ramener la pression de l'air détendu à sa valeur initiale, il faut comprimer le gaz et fournir un travail au moins égal à celui que nous avons recueilli. Nous devons donc modifier l'énoncé du résultat ci-dessus en disant qu'*un système qui parcourt un cycle ne peut jamais produire de travail en empruntant de la chaleur à une seule source.*

Sous la forme que lui a donné Thomson (Lord Kelvin), le second principe s'énonce alors :

> un système fermé ne peut parcourir un *cycle monotherme* en produisant du travail;

si W *et* Q *sont respectivement le travail et la chaleur reçus par le système au cours d'un tel cycle, on a toujours :*

$$W \geqslant 0, \quad Q \leqslant 0. \tag{5.1}$$

1.3 Énoncé de Clausius

C'est également un fait d'expérience que, dans les systèmes thermiques, la chaleur s'écoule *spontanément* d'un corps chaud vers un corps froid. D'après le principe général d'évolution cité au début de ce paragraphe et *reformulé par Clausius,* on peut alors dire :

> un système fermé ne peut parcourir un *cycle* en transférant uniquement de la chaleur d'une source froide à une source chaude,

en appelant *source chaude* un thermostat (C_1) du milieu extérieur à la température T_1 et *source froide,* un autre thermostat (C_2) du même milieu à la température T_2, avec $T_1 > T_2$. Autrement dit, si l'on veut faire passer de la chaleur d'un corps froid (C_2) vers un corps chaud (C_1), il faut certainement que le milieu extérieur produise du travail. L'énoncé de Clausius interdit, par exemple, à un navire d'avancer sur la mer en lui empruntant de la chaleur pour faire tourner ses turbines et en rejetant éventuellement derrière lui des blocs de glace. (On peut montrer l'équivalence des postulats de Thomson et de Clausius comme énoncés du second principe.)

1.4 Principe de Carnot

Nous avons vu au paragraphe 1.2 que, si un système thermomécanique décrit un cycle monotherme, il reçoit nécessairement du travail ($W \geqslant 0$) et perd de la chaleur ($Q \leqslant 0$); ce cycle est généralement irréversible car, il ne peut selon Thomson, être parcouru de façon équivalente dans ses deux sens : en effet, si dans un sens, $W > 0$ et $Q < 0$ tel que $W + Q = 0$, dans le sens opposé $W < 0$ et $Q > 0$ ce qui est impossible; la réversibilité ne pourra se produire que si $W = Q = 0$.

Or notre vie quotidienne nous met en contact avec de nombreux systèmes thermomécaniques qui, au cours d'un cycle, fournissent du travail au milieu extérieur ($W < 0$), comme une voiture, une turbine, un moteur à réaction, une locomotive, etc. Pour que cela soit possible, il faut donc que les échanges de chaleur ($Q > 0$) du système se fasse avec *plus d'une source.*

Examinons alors le cas où ce système parcourt un *cycle ditherme,* c'est-à-dire échange de la chaleur avec *deux* sources : *elles sont obligatoirement à des températures différentes;* sinon, on serait ramené au cas d'un cycle monotherme exclu par le principe de Thomson.

Soit (C_1) la source chaude de température T_1 plus élevée que celle T_2 de la source froide (C_2). Appelons W, Q_1 et Q_2, le travail et les quantités de chaleur reçues par le système au cours d'un cycle. Nous devons avoir, d'après le premier principe :

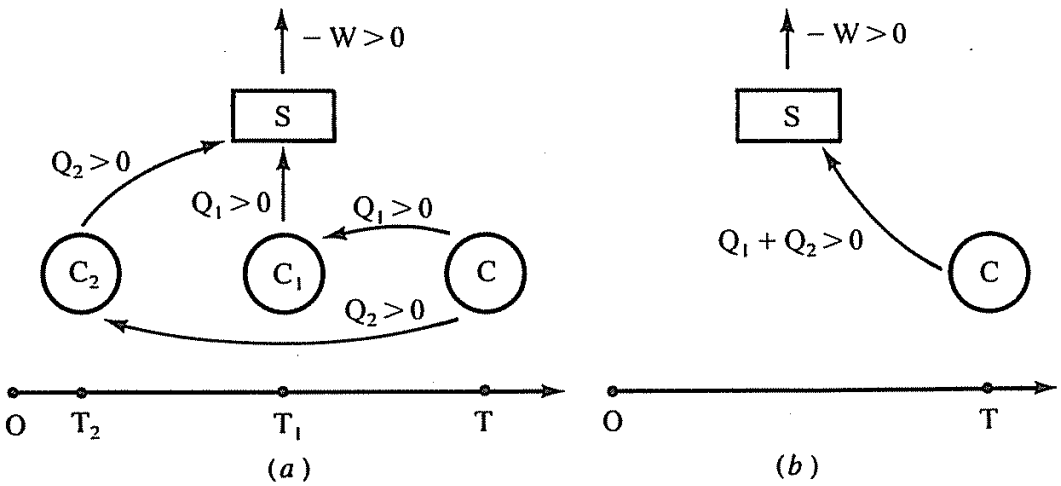
$$W + Q_1 + Q_2 = 0 \longrightarrow -W = Q_1 + Q_2.$$

Le système étant supposé fournir du travail au milieu extérieur ($-W > 0$), la quantité totale de chaleur qu'il reçoit des deux sources doit vérifier, pour un cycle, l'inégalité :

$$Q_1 + Q_2 > 0. \qquad (5.2)$$

Cette inégalité peut être satisfaite de *trois* façons différentes :

1° $Q_1 > 0$ *et* $Q_2 > 0$: le système (S) reçoit les quantités de chaleur Q_1 et Q_2 des sources (C_1) et (C_2) tout en travaillant ($W < 0$). Imaginons une troisième source (C) à la température $T > T_1 > T_2$ (fig. 5.1 a) : étant plus chaude, par mise en contact avec (C_1) et (C_2), elle peut leur restituer les quantités de chaleur qu'elles ont fournies individuellement au système (S). Au total (fig. 5.1 b), tout se passe comme si (S) avait reçu $Q_1 + Q_2 > 0$ de la source (C), à la température T, tout en travaillant ($W < 0$) : *cette transformation monotherme est impossible* selon Thomson.



— Les flèches indiquent le sens de l'échange d'énergie.
— Si W et Q sont des quantités d'énergie reçues par un système, réciproquement celui-ci fournit les quantités $-W$ et $-Q$.

FIG. 5.1

2° $Q_1<0$ *et* $Q_2>0$ *avec* $Q_2>|Q_1|$: le système reçoit Q_2 de la source froide (C_2), restitue $-Q_1>0$ à la source chaude (C_1) et fournit du travail au milieu extérieur ($-W>0$). Imaginons une troisième source (C) à la température intermédiaire T telle que $T_1>T>T_2$ (fig. 5.2a) : en la mettant en contact d'abord avec (C_2), et étant plus chaude, elle peut lui restituer la chaleur fournie à (S); puis en mettant (C) au contact de (C_1), comme $T_1>T$, (C_1) peut transférer à (C) la quantité de chaleur reçue de (S).

Au total tout ce passe comme si (S) avait reçu (Q_1+Q_2) de (C), avec $Q_1<0$, $Q_2>0$ et $|Q_1|<Q_2$ soit $Q_1+Q_2>0$, et fourni le travail $-W>0$ (fig. 5.2b) : cette *transformation monotherme est impossible* selon Thomson.

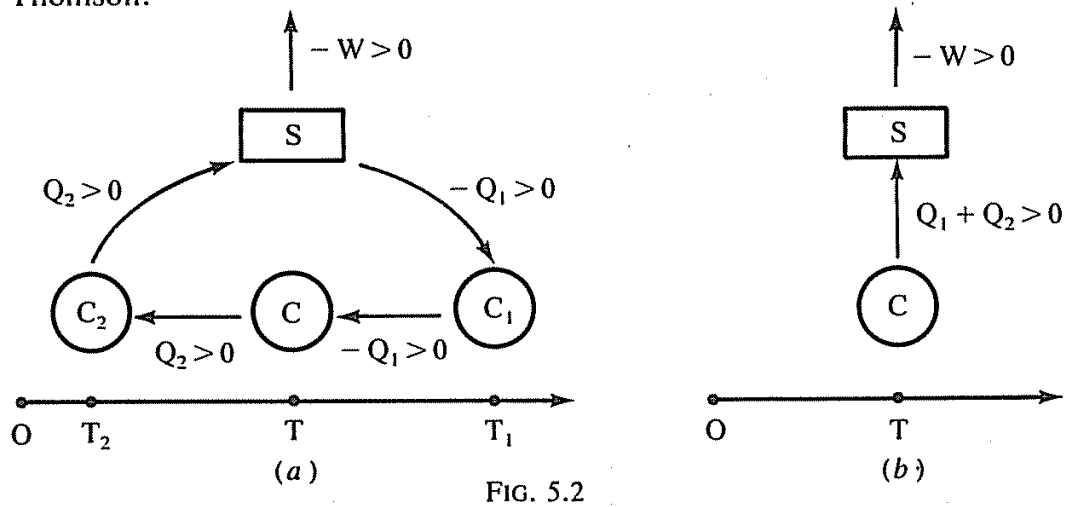


FIG. 5.2

3° $Q_1>0$ *et* $Q_2<0$ *avec* $|Q_2|<Q_1$: le système (S) reçoit de la chaleur ($Q_1>0$) de la source chaude (C_1), en restitue une fraction ($|Q_2|<Q_1$ et $-Q_2>0$) à la source froide (C_2) et fournit le travail ($-W>0$) au milieu extérieur (fig. 5.3). Rien ne s'oppose à ce que cette transformation ait lieu.

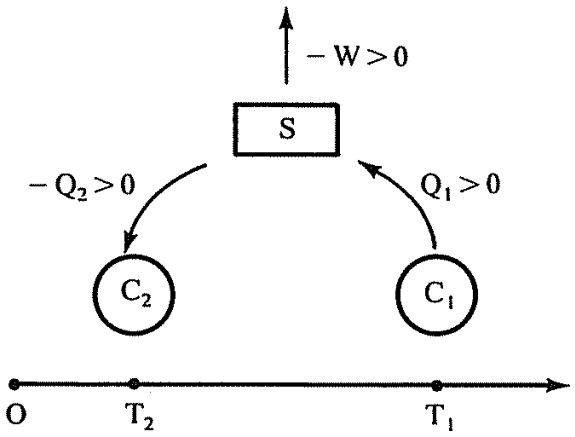


FIG. 5.3

Ce résultat unique conduit à l'énoncé du *second principe selon Carnot :*

> Un système thermomécanique, au cours d'un cycle ditherme, peut fournir du travail au milieu extérieur à condition d'emprunter de la chaleur à une source chaude et d'en restituer une partie à une source froide.

On a donc, *pour un cycle ditherme :*

$$T_1 > T_2, \quad W < 0, \quad Q_1 > 0, \quad Q_2 < 0, \quad Q_1 > |Q_2|. \tag{5.3}$$

Examinons maintenant la situation suivante : le *système,* au cours d'un *cycle ditherme, reçoit du travail* du milieu extérieur ($W > 0$) et fournit globalement de la chaleur, puisque, alors :

$$-(Q_1 + Q_2) > 0. \tag{5.4}$$

Cela peut être réalisé de trois manières :

1° $Q_1 < 0$ *et* $Q_2 < 0$: les figures 5.4 a et b montrent qu'en fait cela est une *transformation monotherme* ($T < T_2 < T_1$) toujours possible.

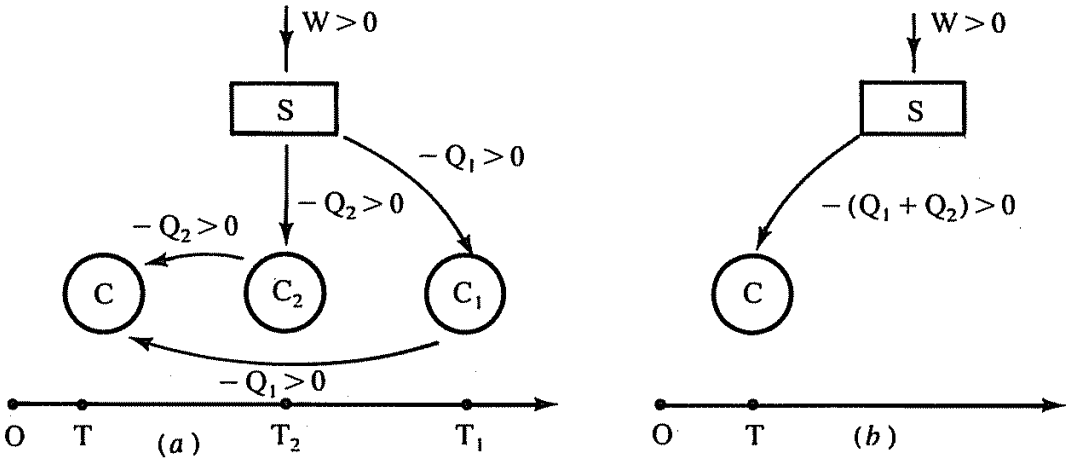


FIG. 5.4

2° $Q_1 > 0$ *et* $Q_2 < 0$ *avec* $Q_1 < |Q_2|$: cette situation schématisée sur la figure 5.5a est équivalente (fig. 5.5b) à un transfert direct, par mise en contact de (C_1) avec (C_2), de la quantité de chaleur $Q_1 > 0$, le système (S) ne fournissant plus que $-(Q_1 + Q_2) > 0$ à la source froide (C_2) : là aussi, la *transformation est monotherme* et possible.

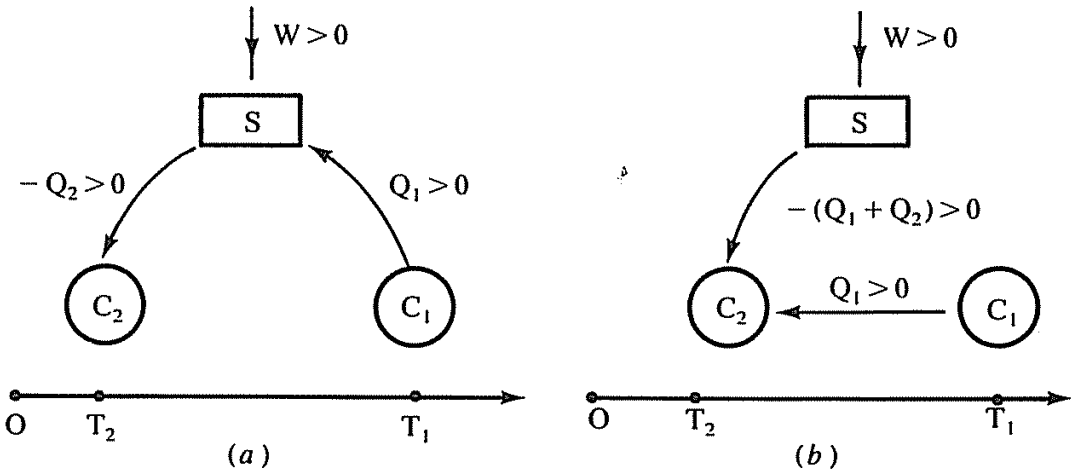


FIG. 5.5

3° $Q_1 < 0$ *et* $Q_2 > 0$ *avec* $|Q_1| > Q_2$: le système reçoit du travail $(W > 0)$ de l'extérieur et transfère une quantité de chaleur de la source froide (C_2) à la source chaude, soit *pour un cycle ditherme :*

$$\boxed{T_1 > T_2, \quad W > 0, \quad Q_1 < 0, \quad Q_2 > 0, \quad |Q_1| > Q_2,} \qquad (5.5)$$

suite d'inégalités énergétiques inverses de (5.3).

Pour mieux mettre en évidence l'inversion des relations entre (5.3) et (5.5), nous avons rassemblé ces deux situations possibles dans la même figure 5.6 :

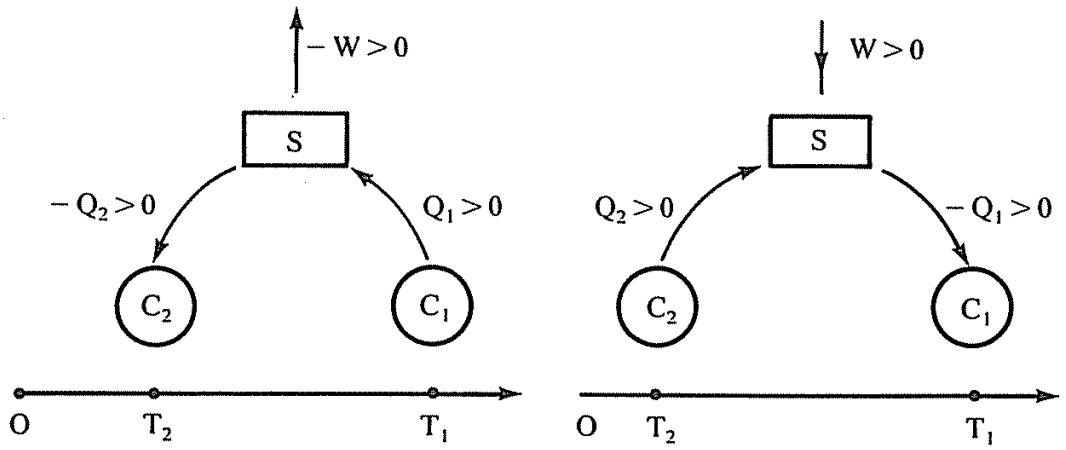


FIG. 5.6

— Le schéma 5.6a (correspondant au principe de Carnot) décrit le fonctionnement d'un *moteur thermique* (machine à vapeur, moteur à explosion) : *le système emprunte de la chaleur à la source chaude* ($Q_1 > 0$), *en restitue une partie à la source froide* ($-Q_2 > 0$) *et transforme le reste en travail tel que* $-W > 0$ *avec* $W + Q_1 + Q_2 = 0$ *pour un cycle.*

— Quant au schéma 5.6 b (correspondant au principe de Clausius), il décrit le fonctionnement d'un *réfrigérateur* ou d'une *pompe à chaleur : le système emprunte de la chaleur à la source froide* ($Q_2 > 0$) *et grâce au travail* ($W > 0$) *qu'il reçoit de l'extérieur, il fournit la chaleur* ($-Q_1 > 0$) *à la source chaude de telle manière que* $W + Q_1 + Q_2 = 0$ *pour un cycle.*

Dans un *réfrigérateur,* la source froide est l'intérieur du meuble isolé thermiquement, le système est un fluide comme le fréon ou l'ammoniac, la source chaude est l'air ambiant. Au cours d'un cycle, du gaz liquéfié par le travail du compresseur ($W > 0$) est mis en contact thermique avec l'intérieur du réfrigérateur contenant les aliments et se vaporise partiellement en emportant la chaleur ($Q_2 > 0$). Sa liquéfaction libère la chaleur $-Q_1 > 0$ qui, par l'intermédiaire d'un radiateur situé derrière le meuble, est dissipée dans l'atmosphère.

Pour une pompe à chaleur, la source froide est une grande masse d'eau (mer, lac, rivière) à laquelle la pompe, mue par un moteur électrique, emprunte de la chaleur pour la restituer aux radiateurs des appartements qu'elle réchauffe.

En conclusion, nous voyons que les *seuls cycles dithermes* que peut parcourir un système thermomécanique sont ceux qui obéissent au *principe de Carnot* (5.3) ou au *principe de Clausius* (5.5) dit aussi « Carnot inversé ».

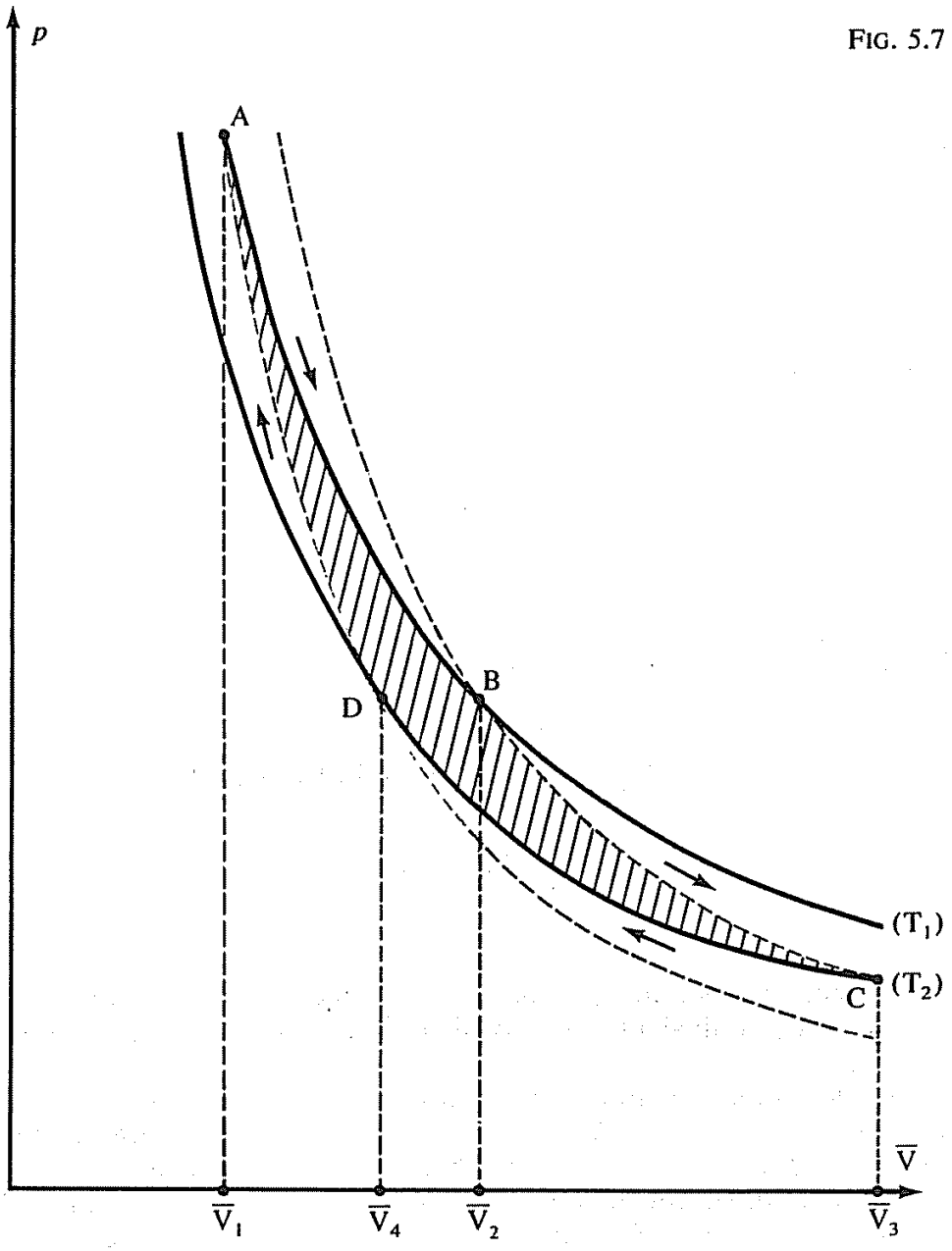
2. CYCLES DE CARNOT. RENDEMENTS. THÉORÈME DE CARNOT

Cherchons à réaliser avec Carnot un ensemble de *transformations réversibles* obéissant aux principes ci-dessus : pour qu'il y ait échange réversible de chaleur entre une source et le système thermomécanique, il faut que ce dernier effectue des *transformations isothermes* aux températures T_2 et T_1 invariantes des thermostats (C_2) et (C_1) (voir § 3 du chap. 3); d'autre part, pour que le système passe réversiblement d'une température T_1 (resp. T_2) à l'autre T_2 (resp. T_1), sans échanger de chaleur avec le milieu extérieur, il doit effectuer des *transformations adiabatiques réversibles* (voir § 8.1 du chap. 4).

2.1 Cas d'un moteur thermique

Ainsi, dans un moteur thermique, un *cycle de Carnot,* décrit par exemple par une mole de gaz parfait, va être constitué de quatre étapes réversibles (fig. 5.7) :

FIG. 5.7



— une détente isotherme amenant la mole de gaz de l'état $A(\overline{V}_1, T_1)$ à l'état $B(\overline{V}_2, T_1)$.

— une détente adiabatique allant de $B(\overline{V}_2, T_1)$ à $C(\overline{V}_3, T_2)$;

— une compression isotherme allant de $C(\overline{V}_3, T_2)$ à $D(\overline{V}_4, T_2)$;

— enfin une compression adiabatique ramenant le système de $D(\overline{V}_4, T_2)$ en $A(\overline{V}_1, T_1)$.

Calculons pour chaque branche du cycle de Carnot, le travail et la chaleur reçus par le système :

— $A \longrightarrow B$: $T_1 = \text{constante} \longrightarrow \Delta\overline{U} = 0 \longrightarrow -\overline{Q}_1 = \overline{W} = RT_1 \text{ Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)$, d'après (4.26 et 25);

— B $\longrightarrow$ C : $\overline{Q}=0$, $\overline{W}=\Delta\overline{U}=\overline{c}_V(T_2-T_1)$, d'après (4.31);
— C $\longrightarrow$ D : $T_2=$ constante $\longrightarrow$ $\Delta\overline{U}=0$ $\longrightarrow$ $-Q_2=\overline{W}=RT_2\,\mathrm{Log}(\overline{V}_3/\overline{V}_4)$;
— D $\longrightarrow$ A : $\overline{Q}=0$, $\overline{W}=\Delta\overline{U}=\overline{c}_V(T_1-T_2)$.

Durant ce cycle, nous obtenons pour :

1° *le travail total reçu par le système :*

$$\overline{W}=RT_1\,\mathrm{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)+RT_2\,\mathrm{Log}(\overline{V}_3/\overline{V}_4).$$

Comme, selon (4.29) : $T_1\overline{V}_2^{\gamma-1}=T_2\overline{V}_3^{\gamma-1}$ et $T_1\overline{V}_1^{\gamma-1}=T_2\overline{V}_4^{\gamma-1}$, nous avons : $\overline{V}_2/\overline{V}_1=\overline{V}_3/\overline{V}_4$, il vient finalement :

$$\boxed{\overline{W}=R(T_1-T_2)\,\mathrm{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)<0,} \qquad (5.6)$$

$\overline{W}<0$ implique que le travail $-\overline{W}$ fourni par le système est positif, puisque la détente isotherme ($T_1=C^{te}$) suppose $\overline{V}_2>\overline{V}_1$;

2° *la chaleur totale reçue par le système :*

$$\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2=-RT_1\,\mathrm{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)-RT_2\,\mathrm{Log}(\overline{V}_3/\overline{V}_4)=-\overline{W};$$

$$\boxed{\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2=-\overline{W}>0.} \qquad (5.7)$$

Conformément au premier principe, le système a reçu une quantité de chaleur $(\overline{Q}>0)$ équivalente au travail qu'il a fourni au milieu extérieur $(-\overline{W}>0)$.

Puisque le moteur restitue $-\overline{Q}_2>0$ à la source froide, *une partie de la chaleur* $\overline{Q}_1>0$ *empruntée à la source chaude n'est pas convertie en travail* $\overline{W}>0$; le *rendement* ρ_r de cette machine thermique *réversible* sera, par définition, *le quotient du travail* effectivement *fourni à l'extérieur* $(-\overline{W})$ par *le plus grand travail* $(\overline{Q}_1)$ que nous aurions pu raisonnablement espérer réaliser :

$$\rho_r=-\frac{\overline{W}}{\overline{Q}_1}=\frac{\overline{Q}_1+\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1}=1+\frac{\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1}.$$

Dans le cas du cycle de Carnot ci-dessus, on peut encore écrire :

$$\rho_r=-\frac{\overline{W}}{\overline{Q}_1}=-\frac{R(T_1-T_2)\,\mathrm{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)}{-RT_1\,\mathrm{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)}=\frac{T_1-T_2}{T_1}=1-\frac{T_2}{T_1},$$

soit :

$$\boxed{\rho_r=1+\frac{\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1}=1-\frac{T_2}{T_1}.} \qquad (5.8)$$

Cette expression ne dépend que de T_1 et T_2 et en aucun cas ni du gaz parfait considéré, ni de sa masse, ni des volumes qu'il occupe à ces différentes températures; nous obtenons ainsi la première partie du *théorème de Carnot :*

> Le rendement de *toutes* les machines thermiques réversibles fonctionnant entre *deux* sources de chaleur déterminées ne dépend que de la température absolue de ces deux sources. Son expression est donnée par (5.8).

On peut, de plus démontrer que ρ_r est indépendant du fluide et du cycle réversible considéré tant que T_1 et T_2 restent les mêmes.

Remarques. • $0 < T_2 < T_1$ entraîne $\rho_r < 1$: le rendement d'un moteur thermique ne peut jamais atteindre 100 %; il peut être amélioré uniquement en diminuant le rapport T_2/T_1.

• Si $T_1 = T_2$, $\rho_r = 0$: cela est une façon d'énoncer le principe de Thomson dans le cas réversible : $W = 0$, $Q = 0$.

2.2 Cas d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur

Nous savons (§ 4.2 du chap. 3) que le *travail* $W = -\oint pdV$ reçu par le système au cours d'un cycle *est mesuré par l'aire algébrique* changée de signe du parallélogramme curviligne ABCD (fig. 5.8a) : dans le cas d'un moteur, où le cycle $\overset{\frown}{ABCDA}$ est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, nous avons $W < 0$. Puisque dans un réfrigérateur ou une pompe à chaleur, $W > 0$, le cycle correspondant est $\overset{\frown}{ADCBA}$ parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 5.8b) : le cycle de Carnot inversé est alors réalisé par :

— une détente AD adiabatique;
— une détente isotherme DC (T_2 = constante);
— une compression CB adiabatique;
— une compression BA isotherme (T_1 = constante).

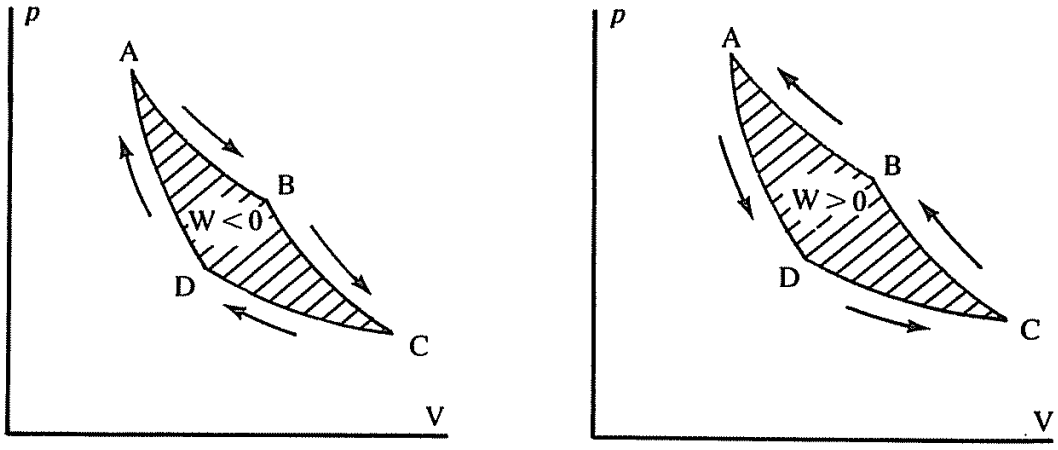


FIG. 5.8

Le travail absorbé par le système ($W > 0$) ainsi que la *chaleur totale échangée* ($Q = Q_1 + Q_2 < 0$) *ont donc les mêmes valeurs absolues* que celles calculées au paragraphe 2.1.

1° *Efficacité d'un réfrigérateur :* son but étant de transférer la chaleur $Q_2 > 0$ de la source froide à la source chaude tout en recevant le travail $W > 0$ de l'extérieur, nous définirons son « efficacité » par :

$$\rho'_r = \frac{\overline{Q}_2}{\overline{W}} = -\frac{\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2}.$$

Comme : $\overline{Q}_1 = RT_1 \operatorname{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2) < 0$, $\overline{Q}_2 = RT_2 \operatorname{Log}(\overline{V}_2/\overline{V}_1) > 0$, on a aussi :

$$\rho'_r = \frac{RT_2 \operatorname{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)}{R(T_1 - T_2) \operatorname{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2};$$

$$\boxed{\rho'_r = -\frac{\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.} \qquad (5.9)$$

Naturellement, le *théorème de Carnot s'applique encore ici* en remplaçant rendement par efficacité et (5.8) par (5.9).

Remarques. • Les conditions pratiques d'utilisation d'un réfrigérateur fixent T_1 et T_2. ρ'_r sera d'autant plus grand, que T_2 et T_1 sont voisins. Si $\rho'_r > 1$, la chaleur $\overline{Q}_2$ prélevée à (C_2) peut valoir plusieurs fois le travail W fourni au système (S).

• Si T_2 tend vers 0 K, $\rho'_r \longrightarrow 0$. Cela signifie qu'il faut fournir un travail W infini au réfrigérateur pour en extraire au moins une calorie à cette température : ainsi, de ce point de vue, 0 K est la limite inférieure de l'échelle de température absolue.

2° *Efficacité d'une pompe à chaleur :* son but est d'apporter la chaleur $-\overline{Q}_1 > 0$ à la source chaude (C_1) en recevant le travail $\overline{W} > 0$ du milieu extérieur; son efficacité sera définie par :

$$\rho''_r = -\frac{\overline{Q}_1}{\overline{W}} = \frac{\overline{Q}_1}{\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2} = \frac{RT_1 \operatorname{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)}{R(T_1 - T_2) \operatorname{Log}(\overline{V}_1/\overline{V}_2)} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\rho''_r = \frac{\overline{Q}_1}{\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2},} \qquad (5.10)$$

efficacité d'une pompe à chaleur réversible, montre que pour cette machine thermique le *théorème de Carnot s'applique* aussi mais avec (5.10).

Remarque. Si on utilisait un cycle monotherme, le système en recevant W fournirait une quantité de chaleur $-Q = W$ à (C_1); pour le même travail absorbé, la pompe à chaleur fournit $-Q_1 = \rho''_r W = -\rho''_r Q$; lorsque T_1 et T_2 ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, $\rho''_r > 1$ implique que $Q_1 > Q$.
Le travail W fourni par l'extérieur est donc mieux utilisé dans une pompe à chaleur.

3. L'ENTROPIE

3.1 Cycles réversibles à plus de deux sources de chaleur

Puisque d'après (5.8, 9 et 10), nous avons pour tout système thermomécanique parcourant un cycle de Carnot :

$$1 + \frac{\overline{Q}_2}{\overline{Q}_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

il en résulte : $Q_2/Q_1 = -T_2/T_1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.} \qquad (5.11)$$

(La chaleur ayant comme l'énergie les propriétés d'une grandeur extensive, on a naturellement : $\overline{Q}_2/\overline{Q}_1 = Q_2/Q_1$, pour une masse m donnée de gaz parfait.)

Considérons maintenant une machine thermique décrivant, par exemple, le cycle $\widehat{ABCDEFGHA}$ (fig. 5.9) construit sur trois isothermes et trois adiabatiques : ce cycle peut, par construction, être considéré comme la somme de trois cycles de Carnot réversibles décrits dans le même sens.
Écrivant la relation (5.11) pour chacun d'eux, nous avons avec des notations évidentes :

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{GH}}{T_2} = \frac{Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{DG}}{T_2} = \frac{Q_{GD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0.$$

Ajoutons ces trois résultats et tenons compte que : $Q_{DG} + Q_{GD} = 0$; il vient :

$$\frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{T_1} + \frac{Q_{GH}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0.$$

Or, si nous appelons Q_i la chaleur reçue par le système en provenance des sources (C_1), (C_2) et (C_3), respectivement aux températures $T_1 > T_2 > T_3$, on a :

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC}, \quad Q_2 = Q_{GH}, \quad Q_3 = Q_{EF},$$

les portions d'isothermes situées à l'intérieur des cycles parcourus deux fois en sens opposés ($\rightleftarrows$) n'intervenant pas dans le bilan thermique. Ainsi :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0.$$

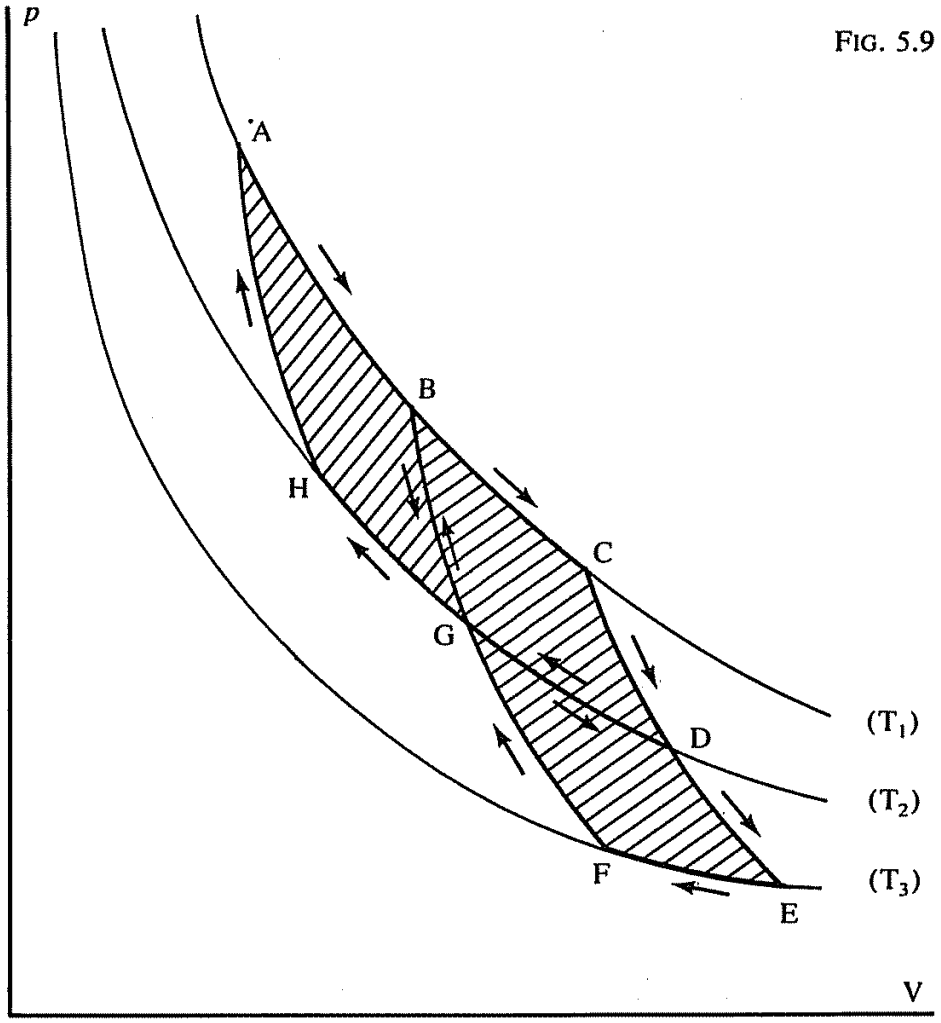


FIG. 5.9

Ce résultat s'étend sans difficulté à un cycle *réversible* constitué d'éléments d'isothermes et d'adiabatiques en nombre fini (fig. 5.10a). Lorsque la machine décrit un tel cycle en recevant la chaleur Q_i de la source à la température T_i, on a toujours :

$$\boxed{\sum_i Q_i/T_i = 0,} \qquad (5.12)$$

ce qui généralise le résultat (5.11) établi pour deux sources.

Comme une telle grille d'isothermes et d'adiabatiques, de plus en plus fine, permet de remplacer un *cycle* (Γ) *de forme quelconque* (fig. 5.10b) par une somme de cycles de Carnot, en passant à la limite et en supposant la *réversibilité de toutes les transformations* donc *du cycle* (Γ) c'est-à-dire *la température* T *définie tout le long du cycle* (voir § 3 du chap. 3), on a :

$$\boxed{\oint \frac{đQ_r}{T} = 0,} \qquad (5.13)$$

l'indice r de $đQ_r$ rappelant le caractère réversible des échanges.

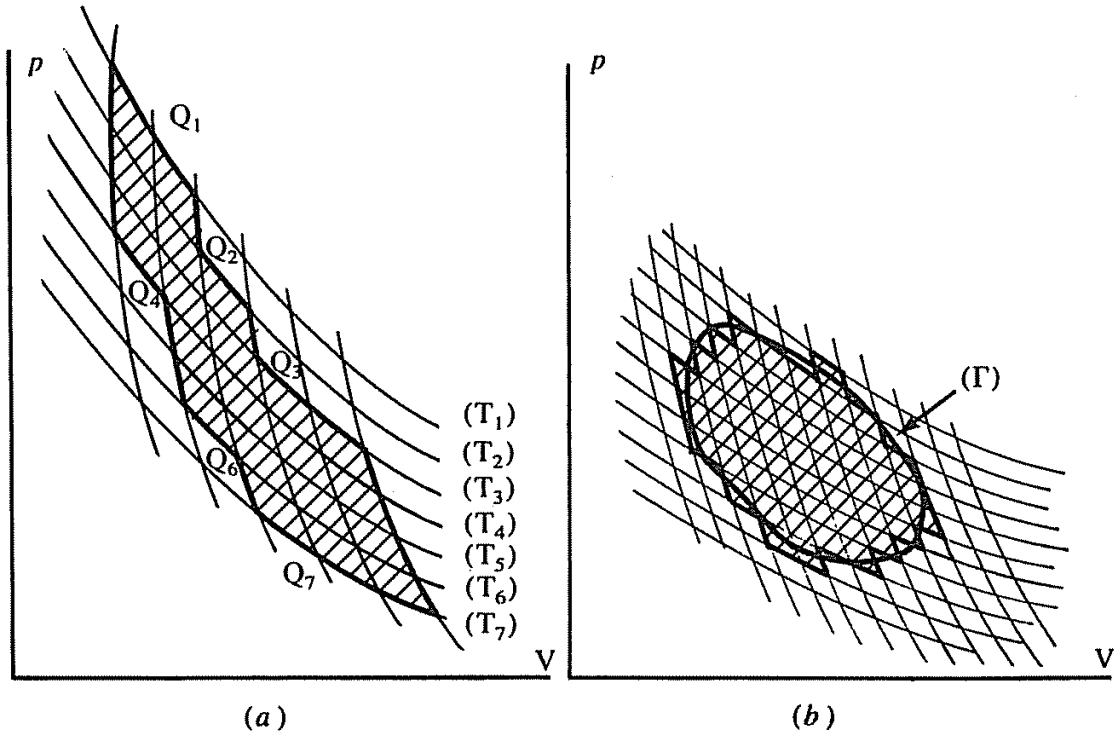


FIG. 5.10

3.2 Introduction de la notion d'entropie

Considérons maintenant deux transformations *réversibles* $\overset{\frown}{AC_1B}$ et $\overset{\frown}{AC_2B}$ différentes amenant le système de A en B (fig. 5.11), et une

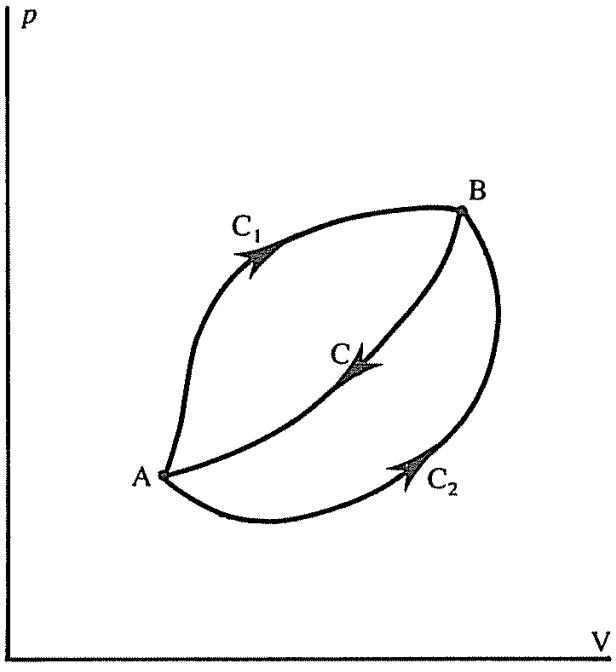


FIG. 5.11

troisième $\overset{\frown}{ACB}$ également *réversible*. A cause de leur caractère de réversibilité, il est possible de parcourir les cycles $\overset{\frown}{AC_1BCA}$ et $\overset{\frown}{AC_2BCA}$, pour lesquels on a respectivement :

$$\int_{\overset{\frown}{AC_1B}} \frac{đQ_r}{T} + \int_{\overset{\frown}{BCA}} \frac{đQ_r}{T} = \int_{\overset{\frown}{AC_2B}} \frac{đQ_r}{T} + \int_{\overset{\frown}{BCA}} \frac{đQ_r}{T} = 0,$$

soit :

$$\int_{\overset{\frown}{AC_1B}} \frac{đQ_r}{T} = \int_{\overset{\frown}{AC_2B}} \frac{đQ_r}{T}.$$

Ainsi lorsque le système thermomécanique passe réversiblement de A en B par un chemin quelconque, l'intégration de $đQ_r/T$ ne dépend pas du chemin parcouru; autrement dit $\int_{\overset{\frown}{AB}} đQ_r/T$ définit une nouvelle *fonction d'état* (à une constante additive près) que l'on appelle, avec Clausius, *l'entropie* S du système.

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AC_1B}} \frac{đQ_r}{T} = \int_{\overset{\frown}{AC_2B}} \frac{đQ_r}{T} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{đQ_r}{T} = S_B - S_A = \Delta S.} \qquad (5.14)$$

S étant homogène à Q/T se mesure — ainsi que sa variation — en $J \cdot K^{-1}$ (ou $cal \cdot deg^{-1}$).

Remarques. • Compte tenu du caractère *extensif* de la chaleur, il en est de même pour l'entropie.

• Une *transformation isentropique* est, par définition une transformation à entropie constante. Si S = constante, alors $dS = \frac{đQ}{T} = 0$ et par suite $đQ = 0$: la transformation est donc *adiabatique réversible* ou isentropique.

3.3 Expressions de l'entropie du gaz parfait

L'entropie S étant une fonction d'état, $dS = \frac{đQ_r}{T}$ *est une différentielle* alors que $đQ_r$ dépend de la transformation.

Dans le cas du gaz parfait, nous connaissons đQ pour une transformation élémentaire réversible; (4.21) donne pour une mole :

1° $đ\overline{Q} = \overline{c}_V\, dT + p\, d\overline{V}$, soit : $d\overline{S} = \frac{đ\overline{Q}}{T} = \overline{c}_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d\overline{V}$,

2° $đ\overline{Q} = \overline{c}_p\, dT - \overline{V}\, dp$, soit : $d\overline{S} = \frac{đ\overline{Q}}{T} = \overline{c}_p \frac{dT}{T} - \frac{\overline{V}}{T} dp$.

Comme le gaz parfait vérifie : $p\overline{V} = RT$, on a aussi pour *l'entropie élémentaire d'une mole :*

$$\boxed{d\overline{S} = \overline{c}_V \frac{dT}{T} + R \frac{d\overline{V}}{\overline{V}} = \overline{c}_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}.} \qquad (5.15)$$

Ces différentielles s'intègrent sans difficulté si l'on tient compte de la relation : $\forall f,\ df/f = d\,\mathrm{Log}\,f$:

$$\boxed{\overline{S} = \overline{S}_0 + c_v\ \mathrm{Log}\frac{T}{T_0} + R\ \mathrm{Log}\frac{\overline{V}}{\overline{V}_0} = \overline{S}_0 + c_p\ \mathrm{Log}\frac{T}{T_0} - R\ \mathrm{Log}\frac{p}{p_0}} \qquad (5.16)$$

$\overline{S}_0$ étant, dans les deux cas, la valeur de $\overline{S}$ pour l'état $(p_0, \overline{V}_0, T_0)$.
Il est facile, de $p\overline{V} = RT$ et de la relation de Mayer $\overline{c}_p - \overline{c}_v = R$, de montrer que ces deux expressions sont bien équivalentes.

4. ENTROPIE ET TRANSFORMATIONS IRRÉVERSIBLES. INÉGALITÉ DE CLAUSIUS

4.1 Transformations irréversibles et inégalité de Clausius

Soit deux sources (C_1) et (C_2) aux températures respectives T_1 et $T_2 (T_1 > T_2)$. Considérons un système (S) évoluant de manière *irréversible,* recevant la chaleur $Q_1 > 0$ de (C_1), restituant $-Q_2 > 0$ à (C_2) et fournissant le travail $(-W > 0)$: ce système est un moteur thermique irréversible (fig. 5.12).

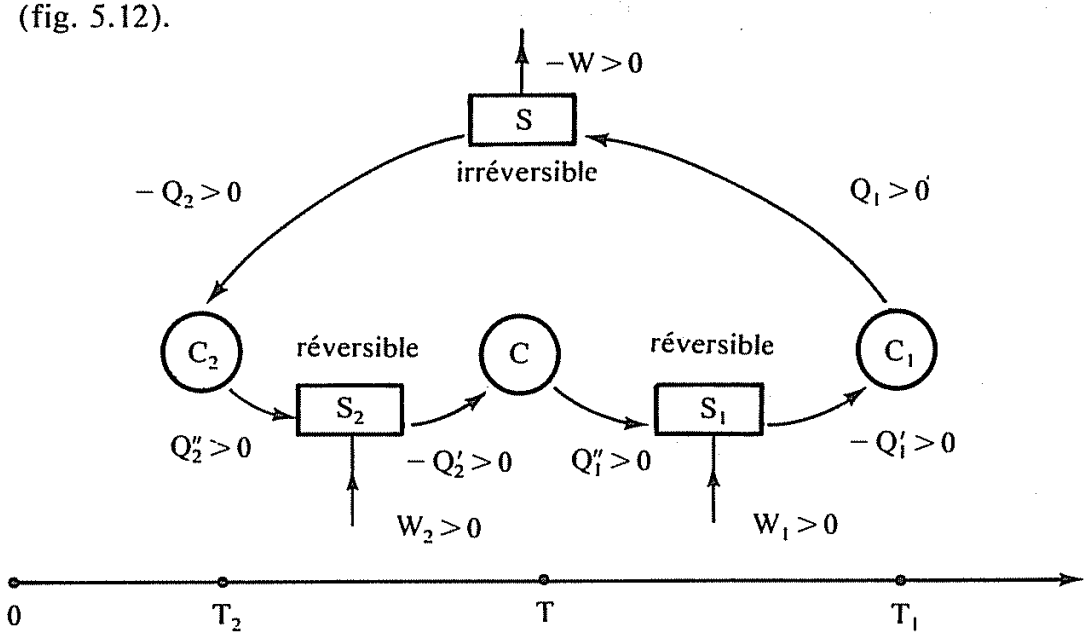


FIG. 5.12

Imaginons maintenant la source (C) à la température intermédiaire $T (T_2 < T < T_1)$ et supposons qu'il existe deux *machines thermiques* fonctionnant de manière *réversible :* (S_1) entre (C) et (C_1), (S_2) entre (C) et (C_2). (S_1) en recevant le travail $W_1 > 0$ et la chaleur $Q''_1 > 0$ de (C) fournit la chaleur $-Q'_1 > 0$ à (C_1) : si l'on désire que (S_1) redonne à (C_1) la chaleur qu'il a perdu, on doit avoir : $-Q'_1 = Q_1$. De même, (S_2) en recevant le travail $W_2 > 0$ et la chaleur $Q''_2 > 0$ de (C_2) peut fournir $-Q'_2 > 0$ à (C) : pour que la chaleur reçue par (S) soit celle que reçoit (C_2) en provenance de (S), il faut que : $-Q_2 = Q''_2$. (S_1) et (S_2) fonctionnent donc comme des réfrigérateurs réversibles.

Compte tenu de (5.8), on aura :

$$\frac{Q_1''}{Q_1'} = -\frac{T}{T_1} \longrightarrow W_1 = -(Q_1' + Q_1'') = -Q_1'\left(1 + \frac{Q_1''}{Q_1'}\right) = Q_1\left(1 - \frac{T}{T_1}\right),$$

$$\frac{Q_2'}{Q_2''} = -\frac{T}{T_2} \longrightarrow W_2 = -(Q_2'' + Q_2') = -Q_2''\left(1 + \frac{Q_2'}{Q_2''}\right) = Q_2\left(1 - \frac{T}{T_2}\right).$$

Or, le *cycle* parcouru par l'ensemble des trois machines (S, S_1 et S_2) est manifestement, d'après la figure 5.12, irréversible (à cause de S) et monotherme [toute la chaleur est échangée avec (C)]; le travail total *reçu* par l'ensemble vérifie alors le principe de Thomson :

$$W + W_1 + W_2 = W + Q_1 + Q_2 - T\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) > 0.$$

Comme pour un cycle de (S) : $W + Q_1 + Q_2 = 0$, on a ainsi :

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0.} \qquad (5.17)$$

Si on envisage un nombre *fini* de sources et un cycle *irréversible* au cours duquel le système reçoit la chaleur Q_i de la source de température T_i, l'égalité (5.12) doit être remplacée par la relation :

$$\boxed{\sum_i Q_i/T_i < 0.} \qquad (5.18)$$

Le résultat (5.18) — dont (5.17) est un cas particulier — constitue *l'inégalité de Clausius* vérifiée, au cours d'un cycle, par toute machine thermique fonctionnant de manière irréversible.

4.2 Retour sur le théorème de Carnot

L'inégalité de Clausius (5.17), valable pour un cycle ditherme, peut être modifiée sous la forme :

$$\frac{Q_2}{Q_1} < -\frac{T_2}{T_1} \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Dans le premier terme, on reconnaît le rendement $\left(\rho_i = -\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}\right)$ de la machine irréversible et dans le second le rendement d'une machine réversible ($\rho_r = 1 - T_2/T_1$) fonctionnant entre les mêmes sources.

Ainsi le *théorème de Carnot* (§ 2) doit être complété de la manière suivante :

> le rendement $\rho_i = 1 + Q_2/Q_1$ d'une machine thermique *ditherme irréversible* est toujours inférieur à celui $\rho_r = 1 - T_2/T_1$ d'une machine *réversible* fonctionnant entre les deux mêmes sources.

4.3 Entropie et inégalité de Clausius

Revenons à la situation décrite par la figure 5.11 et supposons la transformation $\overset{\frown}{AC_1B}$ *irréversible :* au cours de son cheminement, le système emprunte les chaleurs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ à des sources respectivement aux températures $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Si la transformation $\overset{\frown}{BCA}$ est toujours supposée *réversible,* la variation d'entropie lorsque le système part de B et arrive en A vaut :

$$S_A - S_B = \int_{\overset{\frown}{BA}} đQ_r/T.$$

Le *cycle* $\overset{\frown}{AC_1BCA}$ étant finalement parcouru de manière *irréversible* l'inégalité de Clausius s'applique :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \ldots + \frac{Q_n}{T_n} + \int_{\overset{\frown}{BA}} \frac{đQ_r}{T} < 0,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_i Q_i/T_i < \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{đQ_r}{T} = S_B - S_A = \Delta S.} \qquad (5.19)$$

Cas d'un système isolé : si le système thermomécanique est isolé ($W = 0$, $Q_1 = Q_2 = \ldots, Q_n = 0$), les transformations qu'il peut éventuellement subir seront :

— réversibles : $đQ_r = 0 \longrightarrow dS = 0 \longrightarrow S_B = S_A$,

— ou irréversibles : $\sum_i Q_i/T_i = 0 < S_B - S_A \longrightarrow S_B > S_A$.

Ainsi, l'entropie d'un système thermomécanique isolé ne peut décroître : $S_B \geqslant S_A$.

Remarque. Si S est une fonction croissante, cela n'entraîne pas qu'elle tende vers un maximum (exemple : $y = x$, fonction croissante de x sans maximum) ni même — en admettant qu'un tel maximum existe — qu'elle puisse jamais atteindre sa valeur (exemple : $y = 1 - 1/x$, pour $x > 0$, tend asymptotiquement vers le maximum 1).

Un système thermomécanique auquel on ajoute le milieu extérieur est nécessairement un système isolé. Le résultat ci-dessus peut lui être appliqué ce qui donne une *nouvelle formulation du second principe :*

Un processus naturel — donc généralement irréversible — qui relie deux états d'équilibre A et B s'effectue toujours de telle sorte que l'entropie de l'ensemble (système + milieu extérieur) ne peut décroître :

$$S = S_{\text{système}} + S_{\text{milieu}} \longrightarrow \Delta S > 0.$$

L'égalité se produit pour les processus réversibles.

5. EXEMPLES DE CALCUL DE VARIATIONS D'ENTROPIE

Exemple 1. Détente de Joule d'une mole de gaz parfait

C'est un processus *irréversible;* on ne peut donc appliquer : $\Delta S = \int_{\overset{\frown}{AB}} đQ_r/T$ car ni $đQ_r$, ni T ne sont définis précisément au cours de l'évolution du système gazeux. Par contre, il existe *au moins une* transformation réversible qui fait passer le système de A en B et qui respecte les conditions de Joule; c'est une détente isotherme ($T = C^{te}$), pour laquelle, selon (5.15).

$$d\overline{S} = R\,\frac{d\overline{V}}{\overline{V}} = R\ d\,\mathrm{Log}\ \overline{V},$$

soit :

$$\Delta\overline{S} = \overline{S}_B - \overline{S}_A = R\ \mathrm{Log}(\overline{V}_B/\overline{V}_A).$$

Comme $\overline{V}_B > \overline{V}_A$, on constate bien que, pour ce système isolé $(\overline{W} = \overline{Q} = 0)$, $\Delta S > 0$.

Exemple 2. Refroidissement réversible d'un corps solide

Soit un corps solide rigide (sans dilatation), de masse m, mis successivement en équilibre avec une infinité de sources de chaleur dont les températures décroissent insensiblement de T_1 à T_2. Dans de telles conditions qui assurent la réversibilité de la transformation, si, à la température T, le corps subit un accroissement de température dT, il a reçu la chaleur $đQ_r = mc\ dT$ et son entropie s'accroît de : $dS = mc\ dT/T = mc\ d\ \mathrm{Log}\ T$. Supposons c = constante sur $[T_1, T_2]$, alors :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc\ d\,\mathrm{Log}\ T = -mc\ \mathrm{Log}(T_1/T_2) < 0 \quad \text{car} \quad T_1 > T_2.$$

Exemple 3. Refroidissement irréversible d'un corps solide dans un thermostat.

Soit le corps précédent, à la température initiale T_1, plongé dans un thermostat de capacité calorifique très élevée, à la température $T_2 < T_1$. La transformation du corps est alors *irréversible* mais la variation d'entropie correspondante calculée, pour un processus réversible partant de T_1 et arrivant en T_2, peut être utilisée ici : $\Delta S_1 = -mc\ \mathrm{Log}(T_1/T_2)$. Quant au thermostat, à cause de sa grande capacité calorifique, sa température reste égale à T_2 : comme il reçoit la quantité de chaleur $Q = mc\ (T_1 - T_2) > 0$ du corps qui s'est refroidi, sa variation d'entropie vaut :

$$\Delta S_2 = Q/T_2 = mc\ \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

Au total, l'entropie du système thermostat-corps solide a varié de : $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc(x - 1 - \mathrm{Log}\ x)$ si $x = T_1/T_2$. $\Delta S > 0$ car la droite $y = x - 1$, tangente à la courbe $y = \mathrm{Log}\ x$ au point (1, 0), est toujours au-dessus de cette courbe pour toute valeur de $x > 0$: $(x - 1) \geqslant \mathrm{Log}\ x \longrightarrow \Delta S > 0$.

6

CHANGEMENTS D'ÉTATS D'UN CORPS PUR

1. RÉSEAU D'ISOTHERMES. CHANGEMENT D'ÉTAT GAZ-LIQUIDE

1.1 Les faits expérimentaux

Soit le système thermomécanique que constitue un corps pur. On appellera *phase* de ce système toute partie *homogène* du corps. Par exemple, dans un mélange d'eau et de glace, il y aura deux phases : la phase *solide* (glace) et la phase *liquide* (eau); si on chauffe le tout, à la pression normale, la glace fond puis toute l'eau se transforme en une phase *gazeuse* (vapeur d'eau).

Considérons maintenant une mole d'un corps pur enfermée, à température élevée, dans un corps de pompe thermostaté : généralement ce système est gazeux et son comportement thermomécanique est approximativement décrit par l'équation d'état du gaz parfait :

$$p\overline{V} = RT. \tag{6.1}$$

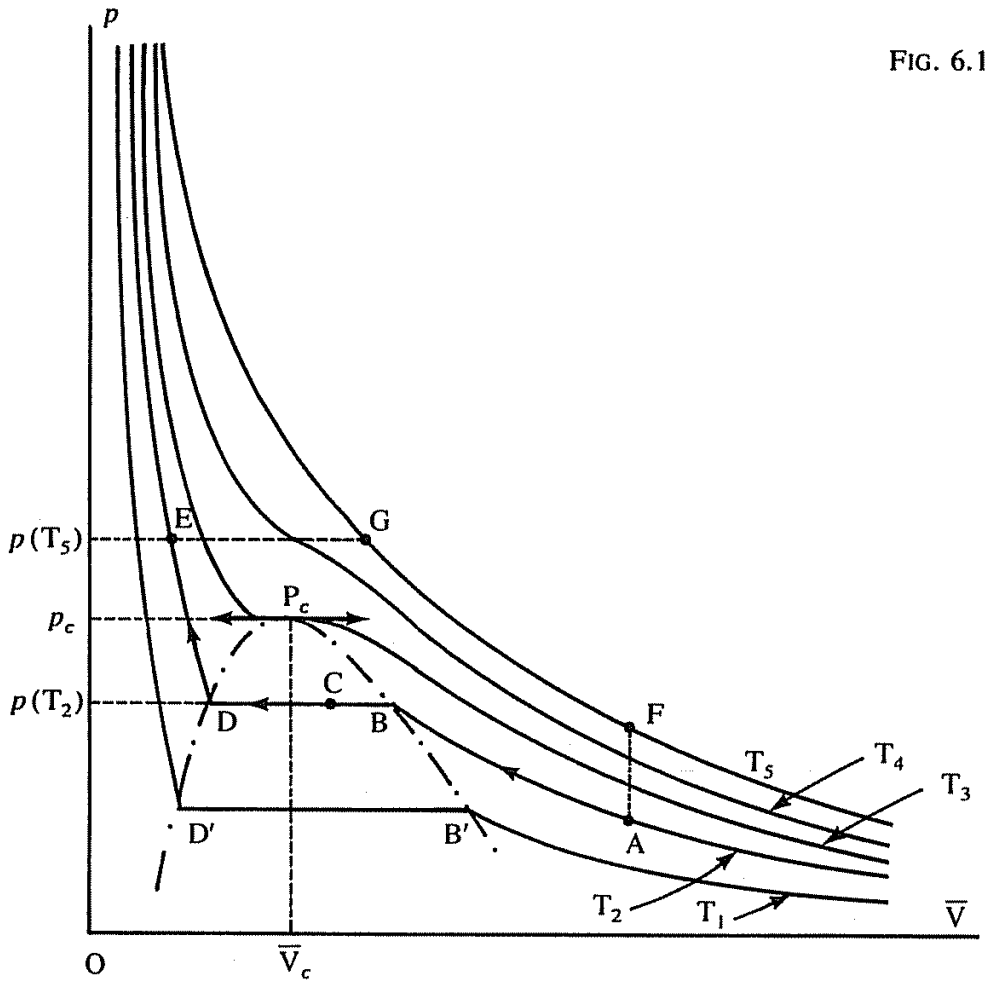
Dans une représentation $(\overline{V}, p)$ de Clapeyron, les états d'équilibre (6.1) de cette phase ont pour graphe une hyperbole : $p\overline{V} =$ constante (fig. 6.1); par exemple, l'hyperbole représentative de l'isotherme T_5.

Abaissons la température du thermostat de T_5 à T_4; le gaz se refroidit et sa température prend également la valeur T_4 : l'hyperbole se déforme en donnant le graphe de l'isotherme T_4.

A une certaine température T_3 plus basse encore, on constate que le graphe de l'isotherme présente au point $P_c\,(\overline{V}_c, p_c)$ dit *point critique,* une *inflexion à tangente horizontale :* la température $T_c = T_3$ et les valeurs p_c et $\overline{V}_c$ correspondantes sont les *variables thermomécaniques critiques* de ce corps pur.

Continuons à refroidir le gaz à la température $T_2 < T_c$. Partons de l'état A de cette isotherme et augmentons progressivement la pression sur la phase gazeuse : le point $(\overline{V}, p)$ correspondant décrit l'isotherme T_2 (dans le sens de la flèche) et, en B, il apparaît quelques gouttes de liquide pour la pression $p(T_2)$.

FIG. 6.1



Si on tente d'augmenter la pression, on constate en fait la coexistence des deux phases gazeuse et liquide, la proportion de liquide augmentant au détriment de celle du gaz. La mesure de la *pression* montre qu'elle *conserve la valeur constante* $p(T_2)$ *durant tout ce changement d'état* gaz-liquide; le point C représentatif de l'état du système décrit le segment de droite horizontale BD. Arrivé en D, tout le corps est devenu liquide et occupe le volume $\overline{V}_D$ du corps de pompe (fig. 6.2).

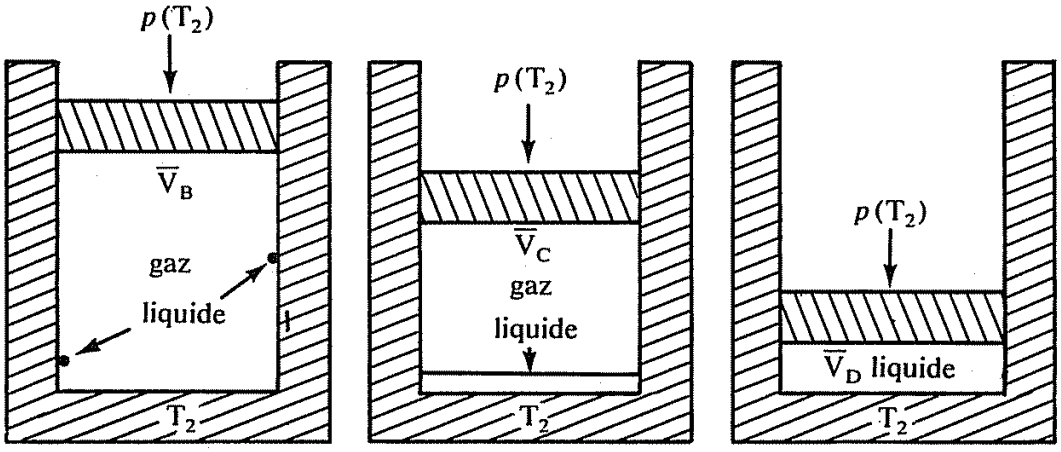


FIG. 6.2

Par augmentation de la pression, le point représentatif de l'état liquide décrit ensuite le reste de l'isotherme (branche DE, par exemple).

A température $T_1 < T_2$, le palier de changement d'état gaz-liquide s'élargit selon B'D'. L'ensemble des points B et D décrit la courbe en trait-point de la figure 6.1 : un point au-dessus de cette courbe (E) appartient à une seule phase, un point en-dessous (C) à un état où coexistent les phases gazeuse et liquide.

1.2 L'état fluide

La distinction quotidienne entre liquide et gaz est quelque peu artificielle : elle ne s'impose en fait que lorsque les deux phases coexistent (par exemple, sur la branche BD de la figure 6.1). Comme nous allons le voir, ces deux phases sont deux aspects d'un même état — *l'état fluide* — par opposition à l'état solide.

Reportons-nous à l'isotherme T_2 de la figure 6.1 et décrivons, par compression, la suite d'états ABCDE : au moment où coexistent gaz et liquide (partie BCD de l'isotherme), il y a dans le corps de pompe (fig. 6.2) une surface de séparation entre ces deux phases.

Or, il est possible de passer de A (phase gazeuse) en E (phase liquide) sans qu'à aucun moment il n'y ait présence simultanée des deux phases. Il suffit d'effectuer pour cela, les transformations :

— isochore AF, en réchauffant le système de T_2 à T_5,

— isotherme FG, qui amène le système à la pression de l'état final,

— isobare GE, en refroidissant le système de T_5 à T_2.

On est donc passé continûment en une seule phase — puisque la courbe $B'BP_cDD'$ de la figure 6.1 n'a jamais été traversée — de l'état « gazeux » (A) à l'état « liquide » (E).

On peut donc parler plus généralement d'un *état fluide* dont le *réseau d'isothermes* est dessiné sur la figure 6.1. Ce qui différencie cet état en A

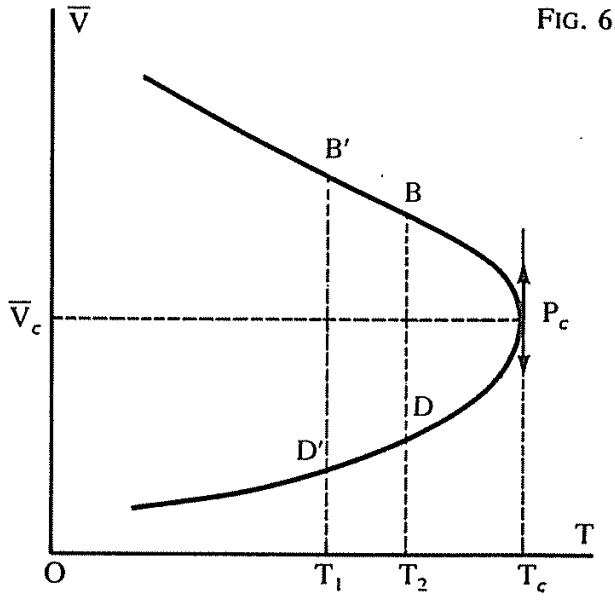


FIG. 6.3

et E, c'est sa densité mesurée par sa masse volumique : elle est très faible en A et très élevée en E.

Ayant tracé le réseau d'isothermes de la figure 6.1 pour une mole de corps, on obtient aisément, en fonction de la température, les volumes molaires des phases gazeuse [par exemple, $\overline{V}(B')$] et liquide [par exemple, $\overline{V}(D)$]. Le graphe $(T, \overline{V})$, dessiné sur la figure 6.3, montre la variation du volume molaire des deux phases et souligne — surtout au voisinage de la température critique — leur ressemblance.

Pour fixer les idées sur les valeurs de ces volumes molaires, considérons une mole d'eau $(\overline{M} = 18\ g)$:

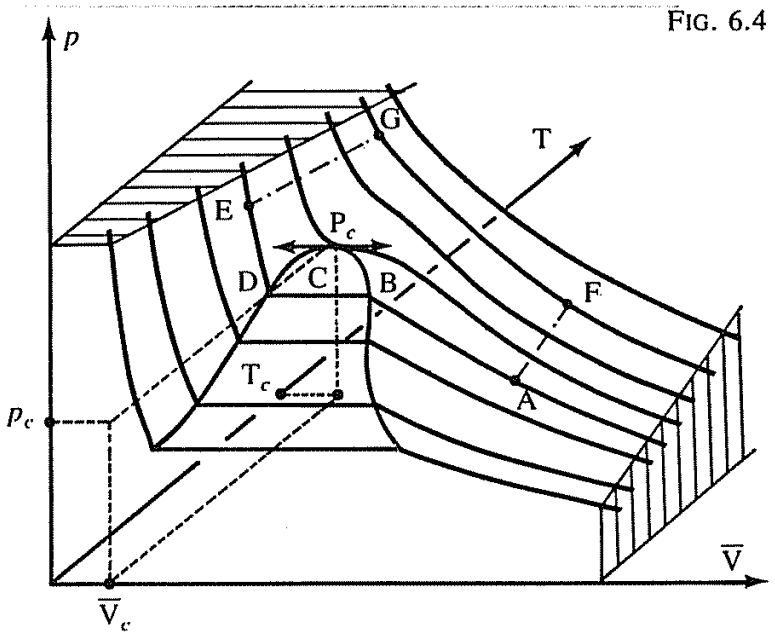
— dans les conditions normales ($p = 1$ atm, $T = 273$ K), elle occupe un volume $\overline{V}_g = 22\,414\ cm^3$ alors que $\overline{V}_l = 18\ cm^3$;

— à la température critique ($T_c = 374\,°C$, $p_c \sim 218$ atm), on a : $\overline{V}_g = \overline{V}_l \neq 45\ cm^3$.

1.3 Représentation (T, *p*) et courbe de vaporisation

Chaque état d'équilibre du fluide est caractérisé par le triplet $(p, \overline{V}, T)$ et en fait le réseau d'isothermes de la figure 6.1 représente la projection orthogonale sur le plan d'équation $T = 0$ de tous les points représentatifs du fluide (fig. 6.4).

FIG. 6.4



Il est également possible d'obtenir une projection orthogonale sur le plan $\overline{V} = 0$; on a alors une représentation (T, p) pour laquelle l'isotherme T_2 est la droite $T = T_2$; les points A, B, C, D, E de la figure 6.1 ayant été reportés sur la figure 6.5, A appartient à l'état gazeux, BCD se projettent en un seul point qui représente l'équilibre liquide-gaz, et E correspond à l'état liquide.

Si on fait varier la température, les points BCD décrivent *la courbe de vaporisation* ou *d'ébullition,* limitée vers les hautes températures au point critique $P_c(T_c, p_c)$. Sous cette courbe, le fluide est à l'état gazeux (A) et au-dessus à l'état liquide (E) : il est évident qu'en tournant autour de P_c, on

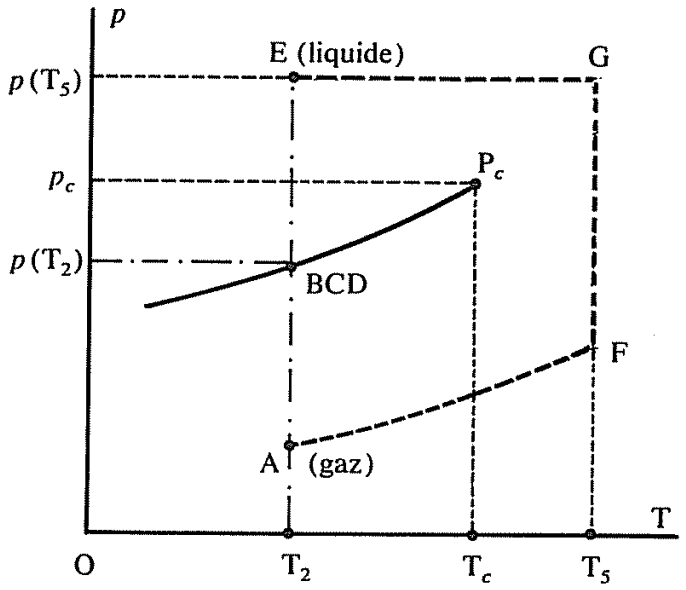


FIG. 6.5

peut passer de l'état gazeux à l'état liquide et vice versa, sans couper la courbe de vaporisation comme le fait le fluide au cours du trajet AFGE (fig. 6.1 et 5).

2. CHANGEMENTS D'ÉTAT FLUIDE-SOLIDE

Soit une mole de fluide à la température T et sous différentes pressions : les points F_1, F_2 et F_3 (fig. 6.6) représentent les états initiaux correspondants de ce corps pur. Refroidissons lentement le fluide, *à pression constante,* et observons son comportement :

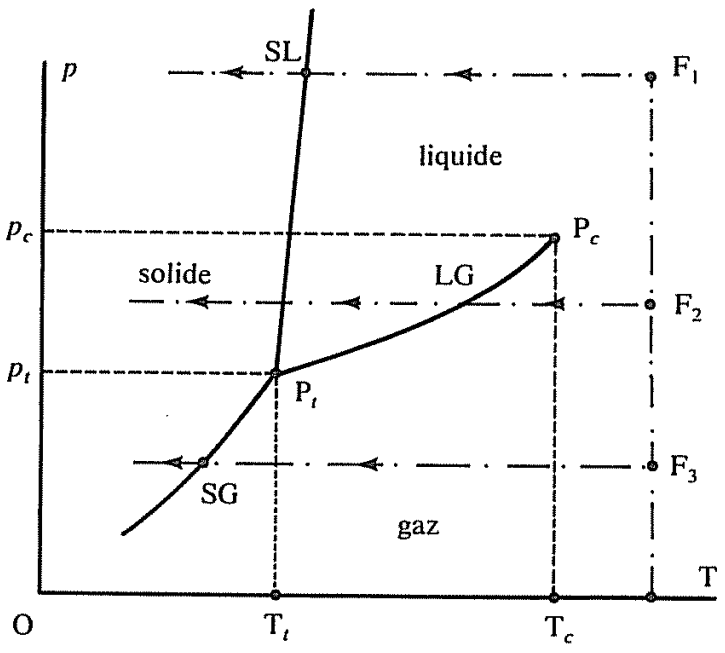


FIG. 6.6

— F_1 appartient à l'état fluide; à une certaine température, on voit apparaître quelques cristaux de la phase solide : si on poursuit le refroidissement isobarique, cette phase solide se développe au détriment de la phase liquide et *la température reste constante durant toute cette transformation.* Quand elle est achevée, la température s'abaisse de nouveau et le corps solide se refroidit.

Il y a donc un *changement d'état liquide-solide* qui se produit à une température bien déterminée et peut être représenté par le point SL de la figure 6.6. L'ensemble des points SL dessine la *courbe de liquéfaction* ou de *fusion :* à sa gauche, on trouve les points caractéristiques du solide, à sa droite ceux du liquide (ou du fluide).

— Soit F_2 tel que $p_{F_2} < p_c$: par un refroidissement isobarique, on observe la transformation gaz-liquide, la température restant constante tant que coexistent les deux phases au point LG (exemple : condensation de la vapeur d'eau d'une cuisine sur une fenêtre, quand il fait froid à l'extérieur). Puis, en continuant à refroidir le système, la phase liquide se transforme en phase solide à température également constante en un point de type SL (s'il fait assez froid à l'extérieur, l'eau condensée sur la vitre peut se transformer en glace).

— Enfin, en partant de F_3, à pression suffisamment basse, le liquide n'apparaît pas mais on passe directement de la phase gazeuse à celle du solide au point SG (par exemple, la respiration d'une personne produit de la vapeur d'eau; si cette personne dort dans une pièce peu aérée et non chauffée, il est courant en hiver de voir du givre se former sur les fenêtres sans trace de condensation liquide). La transformation solide $\longrightarrow$ gaz porte le nom de *sublimation* et l'ensemble des points SG dessine la *courbe de sublimation :* à sa gauche se trouvent les points caractéristiques du solide, à sa droite ceux du fluide.

Les trois courbes SL, LG et SG se coupent en un même point P_t où naturellement les *trois phases coexistent :* on donne à cette intersection le nom *de point triple.* Elles divisent le plan (T, p) en trois régions : vers les basses températures, on trouve la phase solide; elle est séparée de l'état fluide aux basses pressions ($p < p_t$) par la courbe de sublimation, aux pressions élevées ($p > p_t$) par la courbe de fusion; entre le point triple P_t et le point critique P_c, la courbe de vaporisation sépare le liquide du gaz.

Nous avons rassemblé sur la figure 6.7 les courbes de changement d'état de l'oxygène, du gaz carbonique et de l'eau. Comme nous le verrons (§ 5.4) les *pentes* des courbes de sublimation et de vaporisation sont *toujours positives;* par contre, la pente de la courbe de fusion, *généralement positive,* est négative pour quelques corps dont l'eau.

Les pressions p_c et p_t pouvant différer de plusieurs ordres de grandeur d'un corps à l'autre (exemple : H_2O et O_2), nous avons utilisé pour elles une échelle logarithmique. On notera de plus que si, pour tous ces corps $p_c \gg 1$ atm (pression normale), il n'en est pas de même pour p_t : ainsi le gaz carbonique solide se sublime à la pression atmosphérique à $-78\,°C$; on utilise cette propriété dans les glacières à neige carbonique.

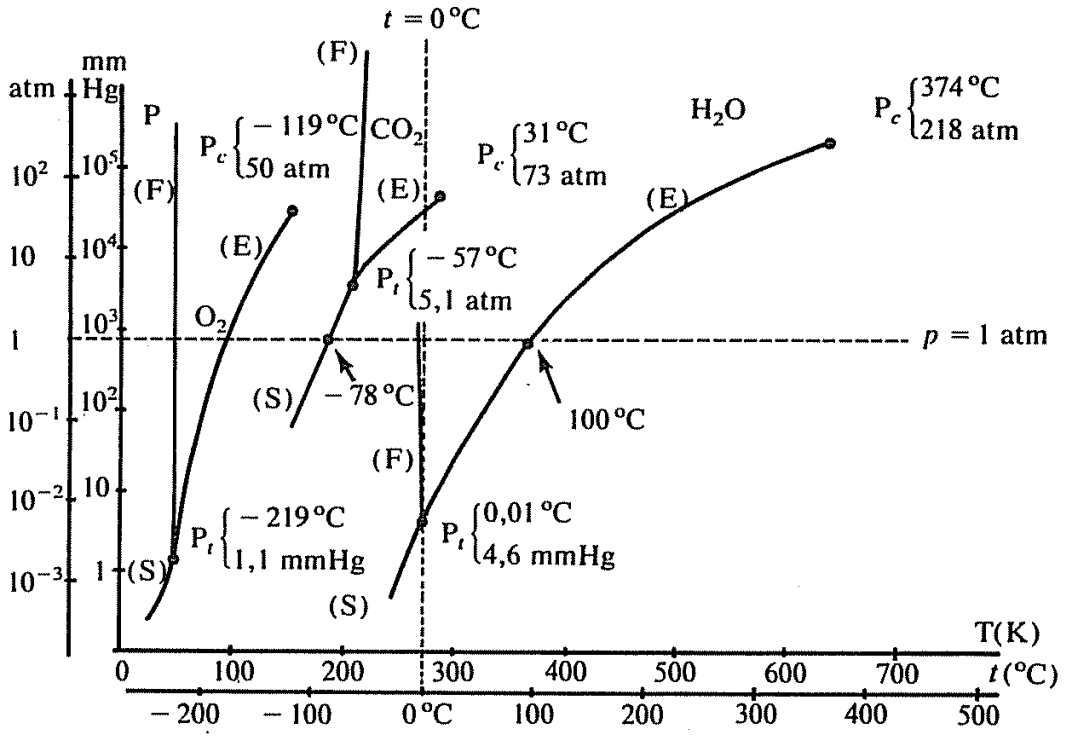


FIG. 6.7

3. TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES D'UN CORPS PUR ET COEFFICIENTS THERMOMÉCANIQUES

L'état d'équilibre du système thermomécanique constitué d'une mole de corps pur est déterminé par trois variables p, $\overline{V}$, T. Nous savons de plus, que l'existence d'une *équation d'état* $\varphi(p, \overline{V}, T) = 0$, *pour une phase donnée,* implique que seules deux de ces variables sont thermodynamiquement indépendantes : si les variables indépendantes sont (p, T), en explicitant $\overline{V}$ en fonction de (p, T) à partir de l'équation implicite $\varphi(p, \overline{V}, T) = 0$, on peut écrire pour $\overline{V}$ et sa différentielle $d\overline{V}$:

$$\overline{V} = \overline{V}(p, T),$$

$$d\overline{V} = \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial T}\right)_p dT. \qquad (6.2)$$

De même, si par exemple, les variables indépendantes sont $(\overline{V}, T)$, on a :

$$p = p(\overline{V}, T),$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \overline{V}}\right)_T d\overline{V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT. \qquad (6.3)$$

Si nous nous intéressons, comme c'est souvent le cas, à de légères modifications (réversibles) d'une phase du système, nous voyons que les variations des variables thermomécaniques mesurées par dp, $d\overline{V}$ et dT sont fonction des dérivées partielles de l'équation d'état correspondante. Il devient donc indispensable de relier ces dérivées partielles à des *coefficients thermomécaniques déterminés par l'expérience* à partir d'un état initial $(p, \overline{V}, T)$ quelconque.

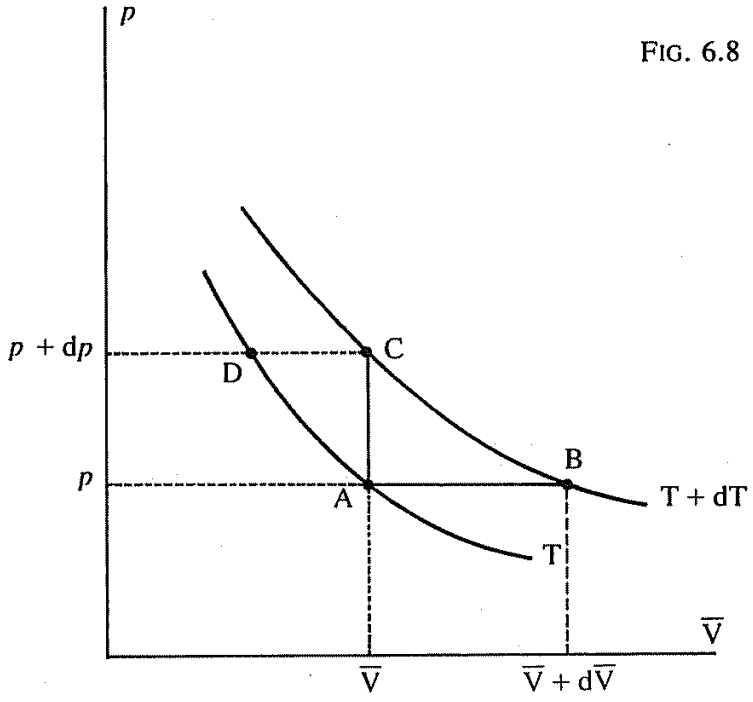
3.1 Coefficient de dilatation isobare

Chauffons légèrement le corps en maintenant sa *pression constante :* sa température passe de T à T + dT, son volume de $\overline{V}$ à $\overline{V} + d\overline{V}$, lorsque le corps évolue de A en B (fig. 6.8). On pose :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\overline{V}} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial T}\right)_p .} \qquad (6.4)$$

De la mesure de $\overline{V}$, $d\overline{V}$ et dT, on déduit α *coefficient de dilatation isobare* mesuré à partir de l'état $(p, \overline{V}, T)$. Il s'exprime en K^{-1}.

FIG. 6.8



Exemple. Pour le gaz parfait, $p\overline{V} = RT$ implique $\overline{V} = \frac{R}{P} T$; d'où :

$$(\partial \overline{V}/\partial T)p = R/p \quad \text{et} \quad \alpha = R/p\overline{V} = 1/T.$$

3.2 Coefficient de dilatation isochore

Chauffons maintenant le système à *volume* $\overline{V}$ *constant :* sa température passe de T à T + dT tandis que sa pression augmente de p à $p + dp$, le corps évoluant de A à C (fig. 6.8). On pose :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .} \qquad (6.5)$$

De la mesure de p, dp et dT, on déduit β le *coefficient de dilatation isochore* mesuré à partir de l'état $(p, \overline{V}, T)$. Il s'exprime en K^{-1} comme α.

Exemple : Pour le gaz parfait, $p = RT/\overline{V} \longrightarrow (\partial p/\partial T)_{\overline{V}} = R/\overline{V}$ et $\beta = R/p\overline{V} = 1/T = \alpha$. Ce résultat est conforme à ce que nous avons dit du gaz parfait au chapitre 2, § 5.

3.3 Coefficient de compressibilité isotherme

Maintenons la *température* T *du système constante* et augmentons légèrement la pression de p à $p + dp$: le volume varie de $\overline{V}$ à $\overline{V} + d\overline{V}$ $(d\overline{V} < 0$ pour $dp > 0)$, le corps évoluant de A à D (fig. 6.8). On pose ($\varkappa$ = lettre grecque kappa) :

$$\boxed{\varkappa_T = -\frac{1}{\overline{V}}\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial p}\right)_T .} \qquad (6.6)$$

De la mesure de $\overline{V}$, $d\overline{V}$ et dp, on déduit $\varkappa_T$ le *coefficient de compressibilité isotherme* mesuré à partir de l'état $(p, \overline{V}, T)$. Il s'exprime généralement en atm^{-1}.

Exemple :
Pour le gaz parfait, $\overline{V} = RT/p \longrightarrow (\partial\overline{V}/\partial p)_T = -RT/p^2 = -\overline{V}/p$ d'où $\varkappa_T = 1/p$.

3.4 Exemples d'utilisation des coefficients thermomécaniques

Connaissant α et $\varkappa_T$, on peut envisager une transformation infinitésimale quelconque à partir de $(p, \overline{V}, T)$.

1° *Transformation* (p, T) : partant de (6.2), on a :

$$d\overline{V} = \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p dT \longrightarrow \frac{d\overline{V}}{\overline{V}} = \alpha\, dT - \varkappa_T dp.$$

2° *Transformation* $(\overline{V}, T)$: de (6.3), il vient :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \overline{V}}\right)_T d\overline{V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT = \left[1/(\partial\overline{V}/\partial p)_T\right] d\overline{V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT,$$

d'après la propriété : $(\partial x/\partial y)_z = 1/(\partial y/\partial x)_z$ établie dans l'annexe mathématique à la fin de cet ouvrage. On a ainsi :

$$dp = -\frac{1}{\varkappa_T}\frac{d\overline{V}}{\overline{V}} + \beta p\, dT.$$

Remarque 1. Contrairement au résultat précédent où $d\overline{V}/\overline{V}$ ne dépend que des coefficients thermomécaniques α et $\varkappa_T$ et des variations dp et dT des variables indépendantes, dp semble dépendre de p par le terme $\beta p\, dT$ en même temps qu'il est déterminé par les valeurs de $\overline{V}$ et T. Cette dépendance n'est qu'apparente, car de même qu'entre les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y, z) = 0$ de trois variables, il y a la relation : $(\partial x/\partial y)_z (\partial y/\partial z)_x (\partial z/\partial x)_y = -1$ (voir annexe mathématique), il y a une relation entre les coefficients thermomécaniques;

puisque : $(\partial\overline{V}/\partial p)_T = -\overline{V}\varkappa_T$, $(\partial p/\partial T)_{\overline{V}} = \beta p$, $(\partial T/\partial\overline{V})_p = 1/(\partial\overline{V}/\partial T)_p = 1/\alpha\overline{V}$, il en résulte : $(-\overline{V}\varkappa_T)(\beta p)/\alpha\overline{V} = -1$, soit :

$$\boxed{p\beta = \alpha/\varkappa_T.} \tag{6.7}$$

De ce fait, dp s'écrit aussi :

$$dp = \frac{1}{\varkappa_T}\left(\alpha\, dT - \frac{d\overline{V}}{\overline{V}}\right),$$

expression ne dépendant que de α, $\varkappa_T$, T et V.

Remarque 2. Le volume étant une grandeur extensive, les définitions des coefficients thermomécaniques et les relations qui les utilisent sont indépendantes de la masse m du corps considéré : par exemple si $m = \nu\overline{M}$, alors :

$$V = \nu\overline{V} \quad \text{et} \quad \varkappa_T = \frac{1}{\overline{V}}\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{V/\nu}\left(\frac{\partial(V/\nu)}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

ainsi que :

$$dp = -\frac{1}{\varkappa_T}\frac{dV}{V} + \beta p\, dT, \text{ etc.}$$

3.5 Ordres de grandeur des coefficients thermomécaniques

Aux températures et pressions ordinaires ($T \sim 273$ K, $p \sim 1$ atm), on a pour un gaz parfait : $\alpha = \beta = \frac{1}{T} \sim \frac{1}{273} \sim 4 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$ et $\varkappa_T = \frac{1}{p} \sim 1\ atm^{-1}$.

Pour l'état fluide, α et β prennent leurs valeurs dans l'intervalle $2 - 4 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$: celles-ci dépendent beaucoup du corps et de sa température surtout pour les gaz.

Les liquides sont plus compressibles que les solides; à titre d'exemples : pour l'eau $\varkappa_T \sim 4{,}5 \cdot 10^{-5}\ atm^{-1}$ et pour ClNa $\varkappa_T \sim 4 \cdot 10^{-6}\ atm^{-1}$.

4. TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES D'UN CORPS PUR ET PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

4.1 Travail et chaleur dans une transformation infinitésimale

On sait (§ 4.2 du chap. 3) que le *travail élémentaire* d'un système hydrostatique — donc d'un corps pur — a pour expression :

$$\boxed{đW = -p\, dV.} \tag{6.8}$$

Quant à la chaleur élémentaire, il est possible de l'exprimer en fonction des variations des variables indépendantes adoptées pour décrire la

transformation du système. Par exemple, pour une transformation $(T, \overline{V})$ d'une *mole* de corps, on écrira la *chaleur élémentaire reçue* sous la forme :

$$\boxed{đQ = \overline{c}_V\, dT + l\, d\overline{V}.} \tag{6.9}$$

Le coefficient thermomécanique $\overline{c}_V$ représente la chaleur massique molaire du corps, à volume constant : $d\overline{V} = 0 \longrightarrow đQ = \overline{c}_V\, dT$ conformément au paragraphe 4.3 du chapitre 4. Quant au coefficient l, il doit dépendre comme tous les coefficients thermomécaniques des données définissant le système dans l'état d'équilibre $(p, \overline{V}, T)$ au voisinage duquel on mesure đW et đQ.

4.2 Variations élémentaires de l'énergie interne et de l'entropie associées à une transformation infinitésimale d'un corps pur. Conséquences

— De $dU = đQ + đW$ (§ 4.1 du chap. 4), il résulte :

$$d\overline{U} = \overline{c}_V\, dT + (l - p)\, d\overline{V}. \tag{6.10}$$

Puisque $d\overline{U}$ est une différentielle, on peut écrire :

$$(\partial \overline{c}_V/\partial \overline{V})_T = (\partial (l - p)/\partial T)_{\overline{V}} \longrightarrow (\partial \overline{c}_V/\partial \overline{V})_T = (\partial l/\partial T)_{\overline{V}} - (\partial p/\partial T)_{\overline{V}}.$$

— De $dS = \dfrac{đQ}{T}$ (§ 3.2 du chap. 5), il vient :

$$d\overline{S} = \overline{c}_V \frac{dT}{T} + \frac{l}{T}\, d\overline{V}; \tag{6.11}$$

dS étant une différentielle, on a :

$$(\partial (\overline{c}_V/T)/\partial \overline{V})_T = (\partial (l/T)/\partial T)_{\overline{V}} \longrightarrow (1/T)(\partial \overline{c}_V/\partial \overline{V})_T = (1/T)(\partial l/\partial T)_{\overline{V}} - l/T^2.$$

Des deux relations obtenues, on en déduit que :

$$l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \tag{6.12}$$

conformément à ce que nous affirmions à la fin du paragraphe précédent. Ainsi, pour un mole de corps pur :

$$\begin{aligned} d\overline{U} &= \overline{c}_V\, dT + \left[T(\partial p/\partial T)_{\overline{V}} - p\right] d\overline{V}, \\ d\overline{S} &= \overline{c}_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V d\overline{V}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Exemple. Considérons une mole de gaz parfait : $p = \dfrac{RT}{\overline{V}} \longrightarrow (\partial p/\partial T)_{\overline{V}} = R/\overline{V} \longrightarrow l = RT/\overline{V} = p$ d'où : $d\overline{U} = \overline{c}_V\, dT$ conformément à la loi de Joule; comme $\dfrac{P}{T} = \dfrac{R}{\overline{V}}$, on a aussi : $d\overline{S} = \overline{c}_V \dfrac{dT}{T} + R \dfrac{d\overline{V}}{\overline{V}}$, résultat déjà établi au paragraphe 3.3 du chapitre 5.

5. CHALEURS LATENTES ET FORMULE DE CLAPEYRON

5.1 Chaleurs latentes de changements d'état

Nous intéressant plus particulièrement aux différentes phases d'un corps pur, nous devons maintenant introduire la *chaleur latente de changement d'état* déjà définie au paragraphe 4.1 du chapitre 4 : c'est la quantité de chaleur que le milieu extérieur fournit à l'unité de masse du corps pour assurer sa transformation de la phase 1 à la phase 2, à *température constante.*

On la note : l_{12} pour l'unité de masse,
$\bar{l}_{12}$ pour une masse molaire $(\bar{l}_{12} = \overline{M} l_{12})$,

et pour une masse dm de corps à transformer, elle reçoit la quantité de chaleur $dQ = l_{12}\, dm$; s'il y a dν moles, on écrit : $dQ = \bar{l}_{12}.d\nu$.

5.2 Signes et ordres de grandeurs des chaleurs latentes

Les chaleurs latentes sont toujours positives pour les transformations qui affaiblissent les interactions entre molécules du corps considéré, la chaleur reçue du milieu extérieur servant à rompre certaines liaisons à courte distance permettant ainsi au changement d'état de se produire.

On a donc pour les transitions :

solide ⟶ liquide, $l_f > 0$,
liquide ⟶ gaz, $l_v > 0$,
solide ⟶ gaz, $l_s > 0$.

Puisque, par définition, *les chaleurs latentes* sont mesurées pour une transformation réalisée à température constante, elles *dépendent de* T. Un liquide ne pouvant exister au-delà de son point critique, sa chaleur latente l_v de transformation en gaz s'annule en T_c, ce qui s'observe sur la figure 6.9, relative à l'eau.

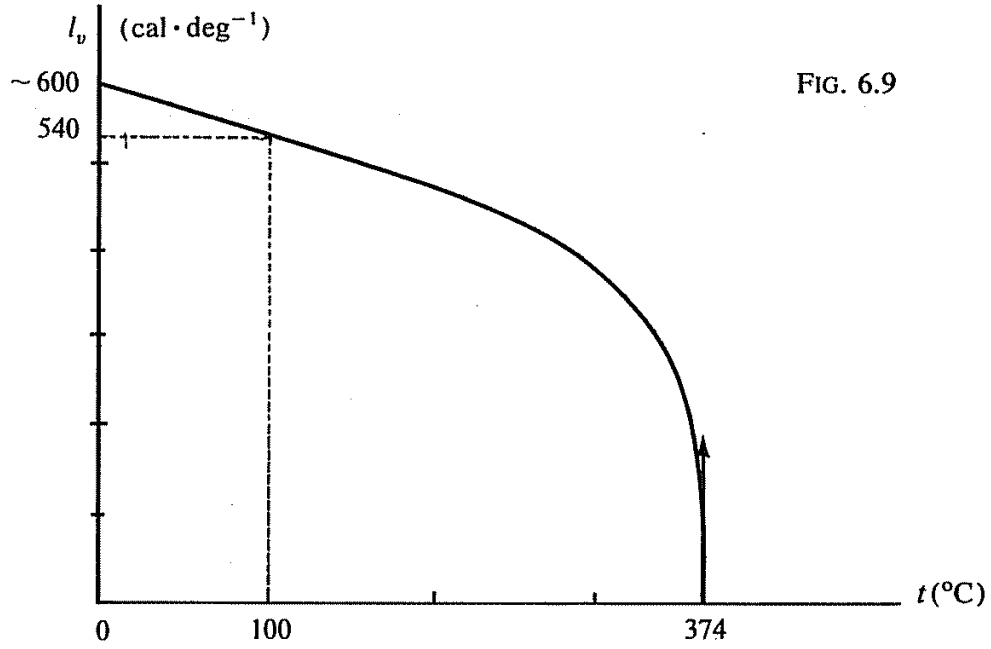


FIG. 6.9

On note de plus que, sous la pression normale, on a pour l'eau $l_v = 540\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$, valeur très élevée devant $l_v \sim 95\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$ de SO_2 ou de C_6H_6 et $l_v \sim 204\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$ pour l'éthanol.

Citons également pour la chaleur latente de fusion de l'eau, sous une atmosphère : $l_f = 80\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$ et pour la sublimation de CO_2 (à 1 atm) : $l_s = 139{,}9\ \text{cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

5.3 La formule de Clapeyron

Nous avons noté que tout changement d'état s'effectuant à une température déterminée, il en est de même pour la pression du système de phases qui se transforme (fig. 6.6). Par contre, le volume du système change au cours de la transformation. On est ainsi amené à écrire, pour un changement d'état d'une *mole* de corps qui se produit à la température T dans le sens $1 \longrightarrow 2$:

— chaleur reçue : $\overline{Q} = \bar{l}_{12}$,

— travail reçu : $\overline{W} = -p\,(\overline{V}_2 - \overline{V}_1)$,

— variation de l'énergie interne : $\Delta\overline{U} = \bar{l}_{12} + p(\overline{V}_1 - \overline{V}_2)$, (6.14)

— variation de l'entropie : $\Delta\overline{S} = \bar{l}_{12}/T$.

Les paramètres thermodynamiques T et p étant bien déterminés au cours d'un changement d'état, cette *transformation* peut être réalisée de manière *réversible* (processus isotherme), le corps restituant la chaleur latente au milieu extérieur.

Nous avons établi au paragraphe 4.1 que la chaleur élémentaire reçue par une mole de corps pur vaut selon (6.9 et 12) :

$$đ\overline{Q} = \overline{c}_V\,dT + T(\partial p/\partial T)_{\overline{V}}\,d\overline{V}.$$

Pour une transformation isotherme ($dT = 0$), ce résultat réversible se réduit à :

$$đ\overline{Q}_T = T(\partial p/\partial T)_{\overline{V}}\,d\overline{V},$$

et, en particulier, dans le cas d'un changement d'état, la transformation ne peut avoir lieu qu'en un point d'une des branches du graphe de la figure 6.6 en ce point, p est indépendant du volume $\overline{V}$ et $(\partial p/\partial T)_{\overline{V}}$ s'identifie avec la valeur de la pente $dp/dT = p'_T$ de la branche considérée. Ainsi :

$$đ\overline{Q}_T = T(dp/dT)\,d\overline{V}.$$

La chaleur reçue est donc directement proportionnelle à la variation du volume. Pour transformer une mole de corps, on lui fournit $\bar{l}_{12}$ pendant que son volume varie de $\overline{V}_1$ à $\overline{V}_2$. Cette remarque nous conduit ainsi à écrire *la formule de Clapeyron :*

$$\boxed{\bar{l}_{12} = T(\overline{V}_2 - \overline{V}_1)\,\frac{dp}{dT}.} \qquad (6.15)$$

5.4 Conséquences de la formule de Clapeyron

1° Les chaleurs latentes de vaporisation $\bar{l}_v$ et de sublimation $\bar{l}_s$ étant toujours positives — sauf au voisinage de T_c où $\bar{l}_v \longrightarrow 0$ — et le volume d'une mole de vapeur $\overline{V}_v$ étant toujours supérieur à celui $\overline{V}_s$ du solide ou $\overline{V}_l$ du liquide correspondant — sauf au voisinage de T_c où $\overline{V}_v - \overline{V}_l \longrightarrow 0$ — on en déduit :

$$(dp/dT)_{\text{vaporisation}} > 0 \quad \text{et} \quad (dp/dT)_{\text{sublimation}} > 0.$$

Les pentes de courbes de changements d'état de vaporisation et de sublimation sont toujours positives.

2° On a également $\bar{l}_f > 0$. Comme, en général, $\overline{V}_l > \overline{V}_s$, on a aussi : $(dp/dT)_{\text{fusion}} > 0$. Mais pour quelques corps (*l'eau en particulier,* le bismuth, l'antimoine) $\overline{V}_l < \overline{V}_s$: le volume molaire diminuant à la fusion, on a alors : $(dp/dT)_{\text{fusion}} < 0$.

L'ensemble de ces résultats est schématisé sur la figure 6.10. Ainsi quand la température décroît, à pression constante, on a toujours la transformation de phase : fluide $\longrightarrow$ solide. Mais si on accroît la pression, à température constante, on aura : soit fluide $\longrightarrow$ solide si $\overline{V}_l > \overline{V}_s$, soit gaz $\longrightarrow$ liquide si $\overline{V}_l < \overline{V}_s$ et $T_t < T < T_c$, soit gaz $\longrightarrow$ solide $\longrightarrow$ liquide si $\overline{V}_l < \overline{V}_s$ et $T < T_t$.

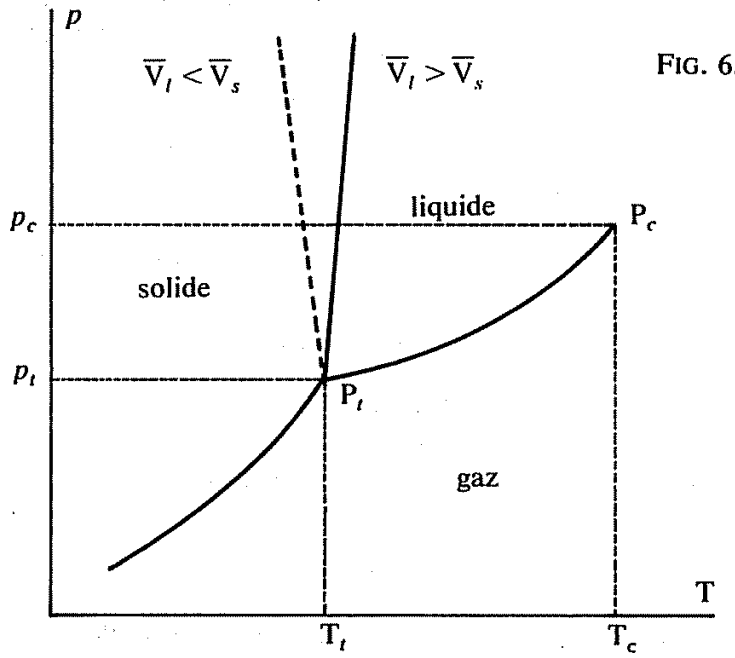


FIG. 6.10

3° Quand la phase 2 est le gaz et si la température T n'est pas trop proche de T_c, on a : $\overline{V}_2 \gg \overline{V}_1$ et $p\overline{V}_2 = RT$. La relation (6.15) s'écrit alors :

$$\bar{l}_{12} \# \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT}. \qquad (6.16)$$

Les variations de $\bar{l}_{12}$ avec T sont généralement faibles — sauf pour $\bar{l}_v$ au voisinage de T_c : supposons alors $\bar{l}_{12} = \bar{l} = \textit{constante;}$ on aura :

$$dp/p = d\ \mathrm{Log}\ p = \frac{\bar{l}}{R}\frac{dT}{T^2} = -\frac{\bar{l}}{R}\,d(1/T),$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{Log}\ p = a + b/T, \quad (b = -\bar{l}/R), \tag{6.17}$$

équation du graphe de la courbe de vaporisation ou de sublimation. La détermination expérimentale de p en fonction de T fournit la constante b et par suite les chaleurs $\bar{l}_v$ ou $\bar{l}_s$ correspondantes (par exemple, entre 700 et 739 K, la pression de vapeur du magnésium ($T_f = 651\,°C$, $T_v = 1\,107\,°C$) obéit à la relation expérimentale : $\log p = -7\,527/T + 8{,}589$: il en résulte que, sur ce domaine de température, $\bar{l}_s = 2{,}30 \times R/7\,527 = 144\ \mathrm{kJ \cdot mole^{-1}}$).

4° On peut aussi montrer aisément que $d\bar{l}_v/dT \longrightarrow -\infty$ quand $T \longrightarrow T_c$ comme cela peut se vérifier sur la figure 6.8. En effet de (6.15), il vient :

$$\frac{d\bar{l}_v}{dT} = \frac{d}{dT}\left[T(\bar{V}_v - \bar{V}_l)\frac{dp}{dT}\right] = (\bar{V}_v - \bar{V}_l)\frac{dp}{dT} + T(\bar{V}_v - \bar{V}_l)\left(\frac{dp}{dT}\right)'_T$$
$$+ T\frac{dp}{dT}\left(\frac{d\bar{V}_v}{dT} - \frac{d\bar{V}_l}{dT}\right) \sim T_c\left(\frac{dp}{dT}\right)_{T_c}\left(\frac{d\bar{V}_v}{dT} - \frac{d\bar{V}_l}{dT}\right)_{T_c},$$

quand $T \longrightarrow T_c$ puisque $\bar{V}_v - \bar{V}_l \longrightarrow 0$. Or si nous nous reportons au graphe de $\bar{V}(T)$ de la figure 6.3, on a :

$$(d\bar{V}_v/dT)_{T_c} = -\infty, \quad (d\bar{V}_l/dT)_{T_c} = +\infty,$$

et finalement :

$$(d\bar{l}_v/dT)_{T_c} = -\infty.$$

5° Décrivons un cycle infinitésimal autour du point triple P_t : la surface de ce cycle, dans un diagramme de Clapeyron, représente — au signe près — le travail qui tend vers zéro avec le cycle; quant à la chaleur échangée, elle s'écrit pour une mole, $\pm(\bar{l}_s - \bar{l}_f - \bar{l}_v) = 0$ pour un cycle; d'où la relation, *valable au point triple :*

$$\bar{l}_s = \bar{l}_f + \bar{l}_v. \tag{6.18}$$

7

PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

Des processus de transport ont été rencontrés dans des chapitres antérieurs : la viscosité (§ 4 du chap. 7, t. 1), la conduction électrique (§ 5 du chap. 7, t. 1), la conduction thermique (§ 2 du chap. 3). On les a rassemblés ici pour montrer leur étroite analogie. Mais on étudiera surtout la diffusion à cause de son importance dans les systèmes vivants.

La première partie, purement phénoménologique, ne présente pas de difficulté essentielle. La seconde, consacrée à une explication au niveau moléculaire, est évidemment importante, mais plus difficile.

1. GÉNÉRALITÉS

Il y a « transport » chaque fois qu'un système est écarté de l'équilibre. Si le système présente des températures différentes, de la chaleur (ou énergie) est transportée des régions chaudes vers les régions froides; c'est la *conduction thermique.* Si le système contient des particules chargées, mais à des potentiels électriques différents, un *transport de charges* s'effectue dans le sens qui tend à uniformiser le potentiel (§ 5.1 du chap. 7, t. 1). De même, la *viscosité* correspond à un transport de quantité de mouvement qui tend à égaliser les vitesses (§ 4.1 du chap. 7, t. 1).

Ces phénomènes peuvent avoir un caractère transitoire ou permanent. En voici deux exemples simples :

a) on peut chauffer temporairement l'extrémité d'une pièce de métal, puis arrêter ce chauffage; le système (la pièce de métal) revient à l'équilibre par uniformisation de la température;

b) on maintient une extrémité (1) de la pièce à T_1, l'autre (2) à T_2 ($T_2 < T_1$); il y a alors transport permanent de chaleur de (1) vers (2); le retour à l'équilibre du système est empêché par l'apport permanent de chaleur en (1), et son retrait permanent en (2).

Différents phénomènes de transport peuvent aussi se superposer : par exemple, on peut maintenir aux extrémités d'un fil métallique, à la fois une différence de température et une différence de potentiel. La *diffusion* est un des phénomènes de transport liés aux différences de concentration dans

un fluide. Les exemples qui suivent serviront à la distinguer d'autres processus avec lesquels elle est souvent en concurrence :

a) on libère une certaine quantité de gaz (gaz de ville, parfum, éther, ammoniaque,...) au milieu d'une pièce non chauffée et sans courant d'air; au bout d'un temps plus ou moins long suivant la distance, l'odeur est perceptible dans toute la pièce : les molécules du gaz ont *diffusé individuellement grâce à l'agitation moléculaire;* si on mesure la concentration au bout d'un temps très long, on constate qu'elle est uniforme;

b) on libère le gaz au-dessus d'un radiateur chaud; son odeur est perçue beaucoup plus vite en certains points de la pièce; l'air chaud, plus léger, s'élève au-dessus du radiateur, provoquant un mouvement *collectif de convection;* si la convection est forte, c'est-à-dire si l'air monte rapidement au-dessus du radiateur, elle s'accompagne très souvent de *turbulence* (§ 4.4 du chap. 7, t. 1) qui mélange les gaz encore plus fortement; on peut encore vérifier que la concentration finit par s'uniformiser : elle le fait à la fois par convection, turbulence et diffusion;

c) si le gaz a une masse molaire très différente de celle de l'air, plus grande par exemple, on constate qu'il s'accumule près du plancher (si les mouvements macroscopiques de l'air sont négligeables); la diffusion est alors en concurrence avec la pesanteur qui tend, au contraire de la diffusion, à séparer les deux fluides.

La diffusion est donc un mécanisme de transport de particules dû aux différences de concentrations, et qui s'effectue dans le sens qui annule ces différences, c'est-à-dire des régions plus concentrées vers les régions moins concentrées. Ce processus est peu efficace si on le compare à la convection et à la turbulence, mais il a toujours lieu, alors que les deux autres, dus à des différences de masses spécifiques ou de vitesses, ne peuvent pas toujours s'établir. Qui plus est, leur description quantitative est difficile et reste en grande partie empirique; aussi, nous limiterons-nous à l'étude de la diffusion, qui est d'ailleurs un des principaux mécanismes de transport dans les organismes vivants (en particulier au niveau des membranes).

LES PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT D'UN POINT DE VUE PHÉNOMÉNOLOGIQUE

2. LA DIFFUSION MOLÉCULAIRE : LES LOIS DE FICK

Nous allons examiner en détail le processus de diffusion moléculaire et nous étendrons les résultats, par analogie, aux autres phénomènes de transport.

2.1 L'équation de continuité

Soit un ensemble de particules identiques susceptibles de se mouvoir; par exemple, les molécules d'un fluide *isotherme* qui se déplacent dans une enceinte par agitation thermique.

Par définition, on appelle :

> — *flux net de particules* J le nombre total *net* de particules traversant une surface donnée, dans *une direction donnée,* et pendant l'*unité de temps;*
> — *densité de flux j,* le *flux net* de particules à travers *l'unité de surface* dans une *direction donnée.*

Pour illustrer ces deux grandeurs physiques, considérons un couloir, fermé en son milieu par une porte de 2 m^2. Dans ce couloir, on a, en une heure, dénombré 40 visiteurs allant de A vers B et 20 de B vers A. Alors J (dans le sens $B \to A$) vaut $(-40+20)/60 = -1/3$ personne/minute; $j_{A \to B} = (40-20)/(60 \times 2) = 1/6$ personne/minute/m^2; $j_{B \to A} = -j_{A \to B}$ comme il se doit.

Considérons maintenant un cylindre d'axe Ox, dont la section droite a une aire $S = 1$ (fig. 7.1), de longueur L et contenant N_0 particules. Nous pourrons par la pensée repérer une cloison virtuelle, perpendiculaire à Ox, par son abscisse $x(x \in [0, L])$.

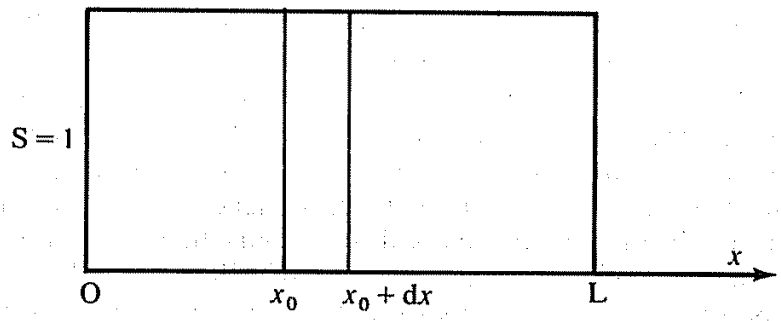


FIG. 7.1

Soit $n(x, t)$ la *concentration volumique* du fluide (c'est-à-dire le nombre de particules par unité de volume) au voisinage de x, et à l'instant t. On a naturellement la relation :

$$\forall t, \int_0^L n(x, t)\,dx = N_0,$$

puisqu'à tout instant, dans le volume élémentaire $dV = S\,dx = dx$, il y a $n(x, t)\,dx$ particules au voisinage de x.

Exprimons le fait que dans le volume élémentaire dx, compris entre les cloisons x_0 et $x_0 + dx$, le nombre de particules $n(x_0, t)\,dx$ peut varier dans le temps; entre les instants t et $t + dt$, sa variation sera mesurée par :

$$[n(x_0, t + dt) - n(x_0, t)]dx \# \left(\frac{\partial n(x_0, t)}{\partial t}\right) dx\ dt.$$

Par unité de temps, cette variation vaudra :

$$\left(\frac{\partial n(x_0, t)}{\partial t}\right) dx.$$

Or, s'il y a eu changement du nombre de particules contenu dans dx, cela provient de l'existence d'un flux de particules à travers les sections x_0 et $x_0 + \mathrm{d}x$. $j(x, t)$ représentant la densité de flux de particules en x, dans le sens $x > 0$ et à l'instant t, on peut encore dire qu'il y a $j(x_0, t)$ particules qui pénètrent par unité de temps dans le volume, alors que pendant la même durée, il en sort $j(x_0 + \mathrm{d}x, t)$: la variation du nombre de particules dans le volume dx par unité de temps est donc aussi égale à :

$$j(x_0, t) - j(x_0 + \mathrm{d}x, t) \neq -\left(\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}\right)_{x_0} \mathrm{d}x.$$

D'où l'égalité des deux expressions :

$$\frac{\partial n(x_0, t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}\right)_{x_0}, \text{ vraie } \forall x_0 \text{ et } t,$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x},} \qquad (7.1)$$

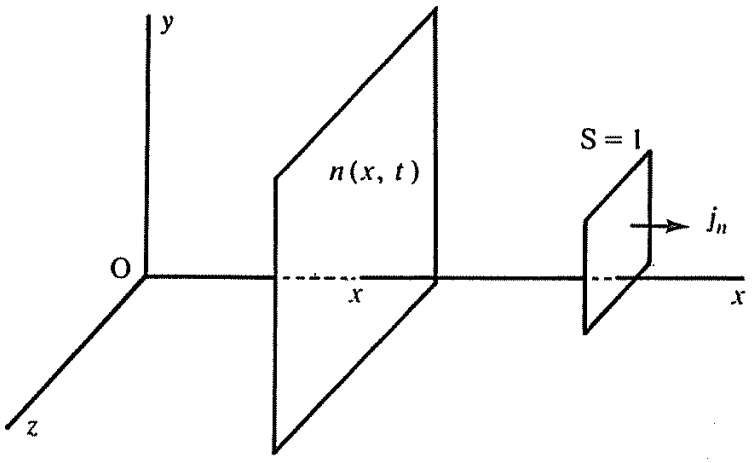
relation connue sous le nom d'*équation de continuité* du fluide.

2.2 Les lois de Fick

Nous allons maintenant examiner plus précisément la diffusion *isotherme* d'un fluide à travers lui-même (processus d'autodiffusion) ou à travers un autre milieu (fluide, solide) homogène et dont les molécules seront considérées comme fixes.

Comme précédemment nous n'examinerons que le cas où $n(x, t)$, concentration volumique du fluide diffusant, ne varie que selon x et t en gardant une valeur constante dans tout plan parallèle à Oyz (fig. 7.2).

FIG. 7.2



D'après ce que nous avons dit au paragraphe 1 la diffusion se produit des régions de forte concentration vers celles de plus faible concentration : plus la décroissance de concentration sera forte, plus le flux de particules sera intense à travers une section donnée; cette décroissance pouvant se mesurer par la dérivée de $n(x, t)$ dans la direction de déplacement Ox, *si*

cette diffudion s'exerce selon $x > 0$, cela implique que $\partial n(x, t)/\partial x < 0$. *On est* alors *amené* naturellement *à faire l'hypothèse que la densité de flux* j_n *du fluide* qui diffuse à travers la section unité *est proportionnelle à la variation linéaire de concentration volumique,* soit :

$$\boxed{j_n(x, t) = -\mathrm{D}\frac{\partial n(x, t)}{\partial x}.} \tag{7.2}$$

Cette hypothèse constitue la *première loi de Fick* (1855); le *coefficient de diffusion* D, étroitement lié aux propriétés moléculaires du matériau, est une constante positive qui dans le *Système international* se mesure en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}([j_n] = [\mathrm{L}]^{-2}[\mathrm{T}]^{-1}$ et $[\partial n/\partial x] = [\mathrm{L}]^{-4} \longrightarrow [\mathrm{D}] = [\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-1})$.

Si nous supposons D *constant,* l'application de l'équation de continuité (7.1) à la densité de flux j_n (7.2), conduit à la *seconde loi de Fick :*

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_n(x, t)}{\partial x} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2},$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2},} \tag{7.3}$$

équation de diffusion ou *seconde loi de Fick* reliant les variations temporelle et spatiale de la concentration volumique $n(x, t)$ par l'intermédiaire de la constante de diffusion.

2.3 Exemple de résolution de l'équation de diffusion en régime stationnaire

Considérons le cas particulier d'un *régime stationnaire,* c'est-à-dire indépendant du temps : $n(x, t) = n(x)$ impose $\partial n/\partial t = 0$, et, d'après (7.3), $\partial^2 n(x)/\partial x^2 = 0$ d'où $\partial n/\partial x = \alpha$. Finalement :

$$n(x) = \alpha x + \beta, \quad (\alpha, \beta \text{ constantes});$$

entre deux régions de concentrations respectives n_1 et $n_2 (n_1 > n_2)$, n varie linéairement avec x en régime stationnaire.

2.4 Application à la mesure de la section moyenne des pores d'une membrane

Soit une membrane poreuse, d'épaisseur e, comportant par unité d'aire n_0 pores de section moyenne σ. Disposons de part et d'autre de cette membrane, une solution moléculaire dont la concentration en (1) est n_1, en (2) n_2 avec $n_1 > n_2$ (fig. 7.3). Si le volume des compartiments (1) et (2) est grand, la diffusion moléculaire du soluté à travers la membrane affectera peu n_1 et n_2, le système sera quasi stationnaire.

Dans ces conditions, on a :

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \alpha = \frac{n_2 - n_1}{e} < 0,$$

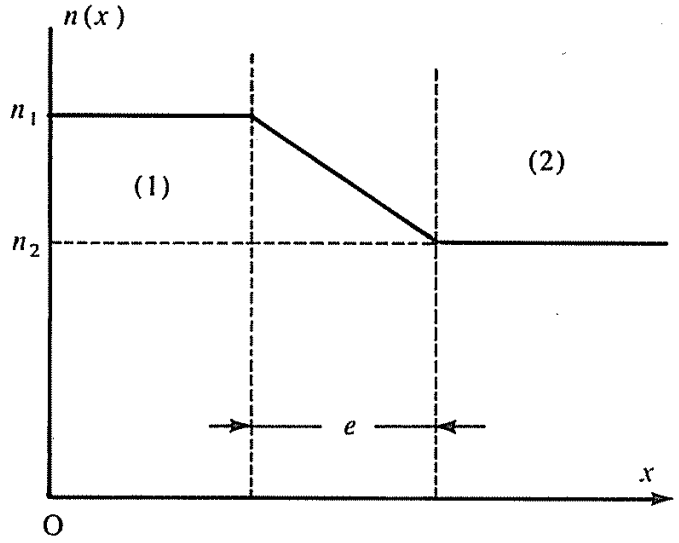


FIG. 7.3

D'où d'après (7.2) :

$$j = -\mathrm{D}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}\frac{n_1 - n_2}{e},$$

expression du flux de densité de soluté à travers la membrane. Sur une unité d'aire de membrane, la surface diffusante vaut $n_0\sigma$ d'où pour le flux net de soluté à travers l'unité d'aire de membrane :

$$\mathrm{J} = n_0\sigma j = n_0\sigma\,\mathrm{D}\frac{n_1 - n_2}{e}.$$

La détermination de J peut se faire en utilisant la radioactivité de certains atomes : si par exemple, on remplace dans une molécule organique un hydrogène par un atome de tritium, la molécule est dite « marquée » et on peut la suivre avec un détecteur de rayonnement de radioactivité. Introduisons dans le compartiment (1) une fraction connue de molécules ainsi marquées : elles vont diffuser au même titre que les autres à travers la membrane et on pourra suivre leur apparition en (2) durant une période déterminée τ. De leur concentration en (2), on déduit le nombre de particules de soluté ayant traversé la membrane pendant la durée τ, puis J. Ainsi, connaissant J, n_1, n_2 et D, on obtient $n_0\sigma$, la densité superficielle de pores de la membrane.

2.5 Exemple de résolution en régime non stationnaire

Soit une solution d'un soluté initialement très concentré dans une zone étroite, d'épaisseur $2a_0$, centrée sur le plan $x = 0$ (fig. 7.4a). Comment va évoluer la concentration du soluté en tout point de la solution?

On suppose, qu'à l'instant initial ($t = 0$), la concentration volumique du soluté puisse être estimée par une fonction de Gauss, très étroite, de largeur à mi-hauteur $2a_0$. Dans cette hypothèse :

$$n(x, 0) = n_0 \exp(-x^2/2a_0),$$

avec n_0 et a_0 constantes (fig. 7.4b).

On peut vérifier que l'expression suivante est solution de (7.3) :

$$n(x, t) = n_0 \frac{a_0}{a} \exp(-x^2/2a^2),$$

avec : $$a^2 = a_0^2 + 2Dt.$$

$n(x, t)$ est encore une fonction de Gauss, dont la largeur à mi-hauteur :

$$l = 2a = 2\sqrt{a_0^2 + 2Dt},$$

croît avec t (fig. 7.4c).

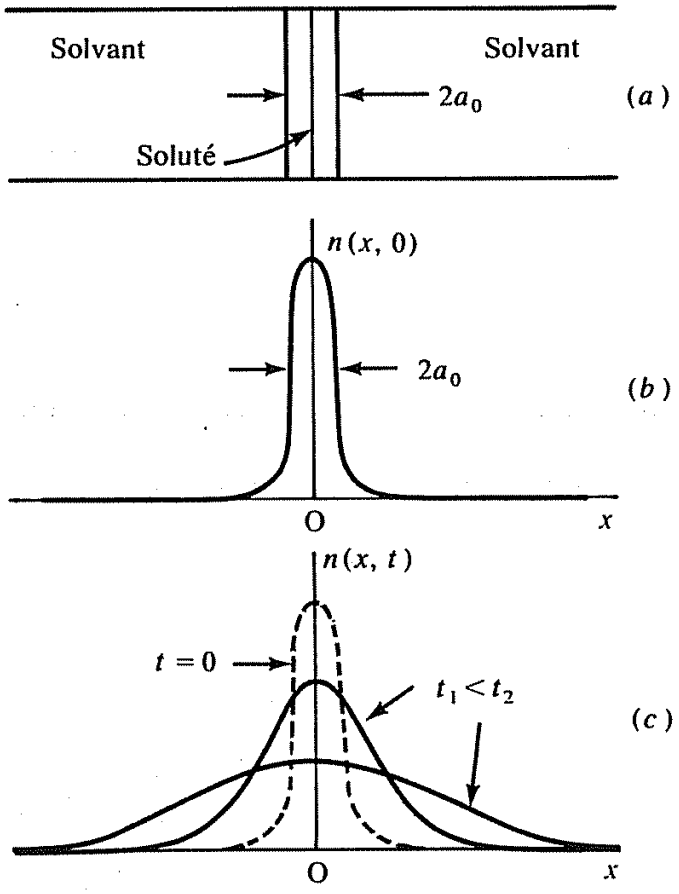


FIG. 7.4

A titre d'illustration, si on prend une lame d'azote d'épaisseur $1 = 2a_0 = 2$ cm, diffusant dans l'air, $D \sim 0{,}18\ cm^2 \cdot s^{-1}$ entraîne $l = 2\sqrt{1 + 0{,}36\ t}$, soit 4 cm au bout de 8 s, 8 cm après 42 s. Dans le cas d'un morceau de glucose de même épaisseur diffusant dans de l'eau, avec $D \sim 7 \cdot 10^{-6}\ cm^2 \cdot s^{-1}$, on trouve $l = 2\sqrt{1 + 1{,}4 \cdot 10^{-6}\ t}$, c'est-à-dire $l =$ 4 cm après 2,4 mn, et 8 cm pour 5,45 mn. Ces résultats reflètent les différences de densité des solvants air et eau, c'est-à-dire en fait les différences des libres parcours moyens dans ces milieux (§ 6.2).

3. LA CONDUCTION THERMIQUE : LA LOI DE FOURIER

3.1 La loi de Fourier et l'équation de la chaleur

Nous avons dit au § 1 que la conduction de la chaleur résultait du transport d'énergie (la chaleur) des régions chaudes vers les régions

froides. Soit $Q(x, t)$ la quantité de chaleur traversant à l'instant t et dans la direction Ox, *l'unité d'aire* située en x. Entre les instants t et $t + dt$, il y a transfert de la quantité :

$$đQ = Q(x, t + dt) - Q(x, t) \neq \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) dt,$$

soit de la quantité $\dot{Q}(x, t)$ par unités de temps et d'aire.

> $\dot{Q}(x, t)$ joue donc pour la conduction thermique le rôle de $j_n(x, t)$ pour la diffusion moléculaire : elle mesure la *densité de flux d'énergie thermique* (en $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ou $W \cdot m^{-2}$).

Par conséquent, à $n(x, t)$ doit être associée pour la conduction thermique, la concentration volumique d'énergie, c'est-à-dire la quantité d'énergie contenue par unité de volume. *Supposons le volume* V *du matériau,* dans lequel a lieu le transfert, *constant* : sa masse volumique ρ *sera aussi constante et si* c_V — également supposée constante — désigne la chaleur massique, nous aurons d'après le paragraphe 4 du chapitre 4 : $đQ_V = dU = \rho c_V dT$, soit :

$$U = \int \rho c_V \, dT + U_0 = \rho c_V T + U_0.$$

La constante n'intervient pas dans le transfert de chaleur puisque celui-ci n'a lieu que si T (ou U) varie d'une région à l'autre; nous pouvons ne pas la considérer.

> Ainsi, la *concentration volumique* en énergie est donnée — à une constante près — par : $U = \rho c_V T$.

De la correspondance :

$$j_n(x, t) \longrightarrow \dot{Q}(x, t), \quad n(x, t) \longrightarrow U(x, t) = \rho c_V T(x, t),$$

il vient :

$$\frac{\partial j_n(x, t)}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial \dot{Q}(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} \longrightarrow \rho c_V \frac{\partial T(x, t)}{\partial t},$$

d'où l'*équation de continuité de la chaleur* (obtenue par analogie avec le fluide de particules) :

$$\boxed{\rho c_V \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{Q}(x, t)}{\partial x}.} \tag{7.4}$$

Si comme pour la diffusion moléculaire, *nous postulons que la densité de flux d'énergie* $\dot{Q}(x, t)$ qui diffuse à travers la section unité *est*

proportionnelle à la variation linéaire de concentration volumique d'énergie U — où *à celle de la température* T — on écrit :

$$\boxed{\dot{Q}(x, t) = -K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x},} \tag{7.5}$$

relation connue sous le nom de *loi de Fourier;* le *coefficient de conductivité thermique* $K > 0$ dépend du matériau et se mesure en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ (ou $cal \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot deg^{-1}$) dans le *Système international* (Q se mesure en $W \cdot m^{-2}$, $\partial T/\partial x$ en $K \cdot m^{-1}$ d'où l'unité de K).

En *supposant* K *constant,* l'application de l'équation de continuité (7.4) à la loi de Fourier donne finalement l'*équation de la chaleur* ou équation de Fourier :

$$\boxed{\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{K}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.} \tag{7.6}$$

3.2 Exemple de résolution en régime stationnaire

Si $T(x, t)$ ne dépend pas du temps, on a comme au paragraphe 2.3 :

$$T(x) = ax + b,$$

a et b étant deux constantes à déterminer. Imposons les conditions $T = T_1$ en $x = x_1$, $T = T_2$ en $x = x_2$, on trouve :

$$a = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}, \quad b = \frac{T_1 x_2 - T_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

La densité de flux d'énergie $\dot{Q}$ ou *puissance transmise par unité d'aire* est alors indépendante de x et vaut :

$$\dot{Q} = -K \frac{\partial T}{\partial x} = -Ka = -K \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}.$$

Nous retrouvons le résultat (3.4) avancé au paragraphe 2 du chapitre 3 traitant du transfert de la chaleur.

3.3 Exemple de résolution en régime non stationnaire

Considérons le sol ou un mur chauffé par le Soleil. En un endroit donné, nous pouvons faire l'hypothèse que la variation diurne (en 24 heures) de la température est une fonction sinusoïdale du temps soit, par exemple, que :

$$x = 0, \quad T(0, t) = T_0 + T_1 \sin \omega t, \quad (T_0, T_1 \text{ constantes}).$$

On contrôlera d'abord sans peine que $T(x, t) = T_0 + T_1 \sin(\omega t - x/a)$, avec $a = C^{te}$, n'est pas solution de (7.6). On essaiera alors :

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \exp(-x/a) \sin(\omega t - x/a),$$

d'où, l'on tire :

$$\partial T/\partial t = \omega T_1 \exp(-x/a) \cos(\omega t - x/a),$$

$$\partial^2 T/\partial x^2 = \frac{2T_1}{a^2} \exp(-x/a) \cos(\omega t - x/a).$$

$T(x, t) = T_0 + T_1 \exp(-x/a) \sin(\omega t - x/a)$ est donc solution de (7.6) à condition de prendre : $a = (2K/\rho c_v \omega)^{1/2}$ et elle vérifie bien la forme imposée en $x = 0$.

Dans le plan d'abscisse x, T varie sinusoïdalement autour de T_0 avec l'amplitude $T_1 \exp(-x/a)$: celle-ci est réduite de $1/e$ à la distance $x = a$. Les variations rapides de T sont atténuées à plus faible distance que les variations lentes : $\omega_1 > \omega_2 \longrightarrow a_1 < a_2$. Pour le sol, a_1 est de l'ordre de 20 à 30 cm pour les variations diurnes; pour les variations saisonnières, on a $\omega_2 = \omega_1/365$ (1 an = 365 jours) et $a_2 = a_1\sqrt{365} \sim 3{,}8$ à 5,7 m : la température d'une cave enterrée sous 6 à 7 m de terre varie donc très peu.

4. LA VISCOSITÉ

Considérons maintenant un fluide dans lequel existe, en plus de l'agitation thermique moléculaire, un mouvement de convection de tout le fluide sous l'action d'une cause extérieure. Supposons, par exemple, le fluide enfermé entre deux plans, l'un (π_1) fixe, l'autre (π_2) se déplaçant parallèlement à (π_1) avec selon Oy la vitesse $\vec{v}$ (fig. 7.5).

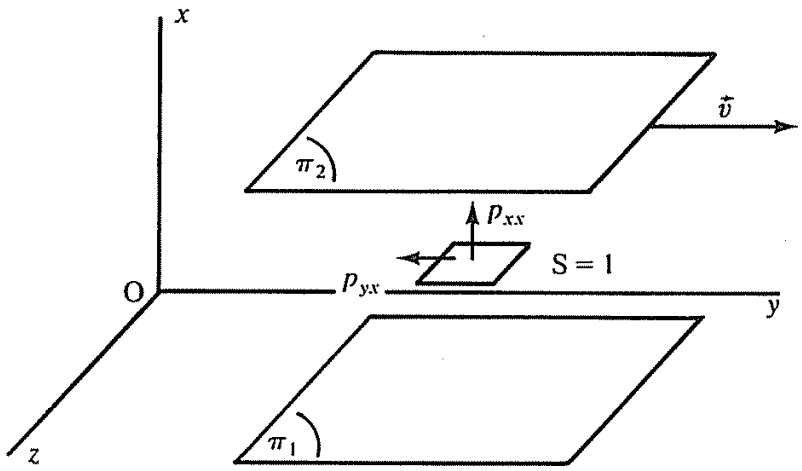


FIG. 7.5

Au voisinage de (π_1) les molécules acquièrent dans leurs collisions avec ce plan une vitesse moyenne nulle selon Oy. Par contre, celles qui avoisinent (π_2) prennent la vitesse moyenne selon Oy égale à v.

Pour une couche plane de fluide (π), à la cote x, les molécules sont *accélérées* en moyenne par les collisions des molécules immédiatement *supérieures* à (π) et *freinées* en moyenne par les collisions avec celles qui sont immédiatement *inférieures* : ainsi les différents plans (π) prennent une vitesse d'entraînement v_y selon Oy, croissante de 0 à v.

Chaque couche étant entraînée par le fluide au-dessus d'elle et freinée par le fluide au-dessous, *il y a donc transport selon* Ox (la direction commune perpendiculaire à tous les (π)) *d'une quantité de mouvement parallèle à* Oy. Pour caractériser cet effet, *on exprime la force,* par unité d'aire S parallèle à Oyz, que *le fluide au-dessous* du plan (π) exerce sur le *fluide au-dessus* : cette force par unité d'aire est la pression p_{yx} et elle est

opposée à $\vec{v}$ par définition. Naturellement l'élément d'aire S est aussi soumis à la pression hydrostatique habituelle du fluide : on pourra la désigner par p_{xx}.

Faisons maintenant l'hypothèse que la pression p_{yx} est d'autant plus grande que la vitesse d'entraînement v_y varie rapidement selon Ox ; cela revient à écrire :

$$\boxed{p_y(x, t) = -\eta \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial x}.} \tag{7.7}$$

Nous retrouvons là l'expression (7.7) de définition du *coefficient de viscosité* η du fluide exprimé en poiseuille dans le *Système International* (§ 4.2 du chap. 7, t. 1).

p_{yx} est une force par unité d'aire : elle mesure la quantité de mouvement transmise par unité de temps et unité d'aire, selon Oy, par la couche inférieure à la couche supérieure : c'est donc la densité de flux de quantité de mouvement analogue à $j_n(x, t)$. Par suite, nous devrons associer à $n(x, t)$ la concentration volumique de quantité de mouvement d'entraînement soit $\rho v_y(x, t)$. Nous obtenons ainsi la correspondance :

$$j_n(x, t) \longrightarrow p_{yx} = p_y(x, t), \quad n(x, t) \longrightarrow \rho v_y(x, t),$$

d'où découle *l'équation de continuité des quantités de mouvement* d'entraînement :

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_y(x, t)}{\partial x},} \tag{7.8}$$

et si nous supposons ρ *constant,* l'*équation de mouvement du fluide visqueux :*

$$\boxed{\frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_y(x, t)}{\partial x^2}.} \tag{7.9}$$

Cette équation est formellement identique aux équations (7.3 et 6), on peut donc transposer à la vitesse les résultats des paragraphes précédents.

5. LA CONDUCTION ÉLECTRIQUE : LA LOI D'OHM

Quand des charges libres sont présentes dans un matériau (électrons de conduction dans un métal, ions dans un gaz ou une solution ionique), leurs mouvements aléatoires sont gênés par les interactions avec les éléments constitutifs du matériau (ions du métal, molécules du gaz ou de la solution) : il va donc y avoir diffusion dans toutes les directions.

Cependant si un champ électrique extérieur est appliqué, un mouvement d'entraînement va se superposer au mouvement précédent et un courant électrique apparaît dont la *densité de courant* j_E mesure la densité de flux de charges électriques, c'est-à-dire la quantité de charges positives (resp. négatives) traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire, par exemple, à Ox dans le sens $x > 0$. Supposons que cela

se produise dans le cylindre de la figure 7.6, de longueur l et de section S. Le courant I représentant le flux de charges traversant S selon Ox, on a la relation (7.11 du t. 1) :

$$I = j_E S. \tag{7.10}$$

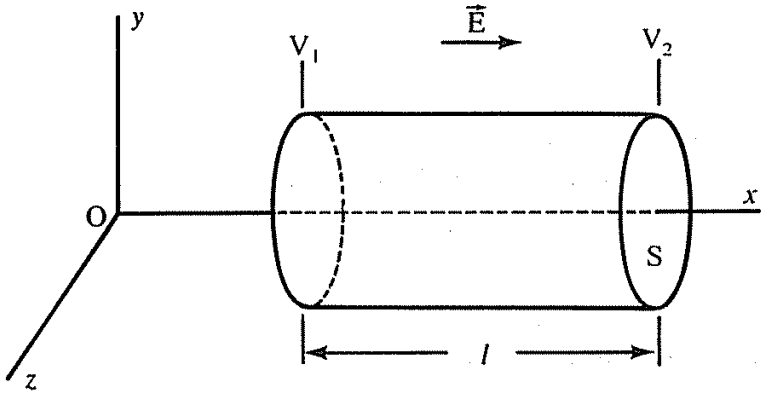


FIG. 7.6

Si aux extrémités du cylindre est appliqué la différence de potentiel $V_1 - V_2$, on a d'après la loi d'Ohm, $(V_1 - V_2) = RI = RS j_E$. Comme $(V_1 - V_2)$ entraîne l'existence d'un champ électrostatique d'intensité $E = \dfrac{V_1 - V_2}{x_2 - x_1}$ [d'après (6.33) du t.1], on a aussi, en posant $x_2 - x_1 = l$:

$$\boxed{j_E = \frac{V_1 - V_2}{RS} = \frac{l}{RS} E = \sigma_E E.} \tag{7.11}$$

Cette relation définit la *conductivité électrique* σ_E du matériau qui, d'après la relation (7.14 du t. 1) s'identifie avec $1/\rho$, inverse de la résistivité électrique du matériau, et se mesure par conséquent en $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{mètre}^{-1}$.

Si le champ électrique n'est pas uniforme, on peut donner à la loi d'Ohm (7.11) une allure différentielle plus générale; en écrivant que le champ électrique E dérive du potentiel V selon x, soit : $E = -\partial V/\partial x$, on a :

$$\boxed{j_E = -\sigma_E \frac{\partial V}{\partial x}.} \tag{7.12}$$

Sous cette forme, la densité de courant apparaît comme proportionnelle à la variation selon Ox du potentiel V, source du déplacement des porteurs de charge. Ce résultat est l'analogue de la première loi de Fick, de la loi de Fourier et de la relation (7.7)

Puisque j_E, densité de courant, n'est autre que la densité de flux de charges, nous devons, par analogie avec les cas précédemment traités, lui associer la densité de charge $\rho_E = nq$ si n représente la densité volumique de porteurs de charge q. L'équation de continuité devient donc pour un conducteur ohmique :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_E(x, t)}{\partial t} = q \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_E}{\partial x}.} \tag{7.13}$$

Il n'est pas possible de poursuivre, comme dans les cas précédents, car il faudrait pour cela connaître une relation entre ρ_E et V dont l'étude sort du cadre de cet ouvrage.

Remarque. Nous avons établi au paragraphe 3.2 que la puissance thermique transmise par unité d'aire s'écrit :

$$\dot{Q} = -K \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2}.$$

A travers un matériau, d'épaisseur $l = x_2 - x_1$ et d'aire S, la puissance transmise par conduction thermique vaut :

$$I_T = \dot{Q}S = \frac{KS}{l}(T_1 - T_2).$$

On peut donc, *par analogie avec la conduction électrique,* définir la résistance thermique R_T du conducteur par :

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{I_T} = l/KS. \qquad (7.14)$$

Cette analogie permet d'appliquer aux conducteurs thermiques les résultats obtenus en électricité pour les groupements en série ou parallèle de résistance électriques.

LES PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT D'UN POINT DE VUE MICROSCOPIQUE

6. SECTION EFFICACE ET LIBRE PARCOURS MOYEN

Dans tout ce qui précède, bien que nous appuyant sur le caractère moléculaire des phénomènes de transport, nous avons seulement développé une *description phénoménologique* de ces processus, puisque nous n'avons pas fait intervenir les caractéristiques des molécules comme leur distribution de vitesse, leur vitesse quadratique moyenne, leur énergie cinétique moyenne, etc.

Si nous voulons réexaminer nos résultats d'un point de vue microscopique, c'est-à-dire à l'aide de la théorie cinétique, il devient nécessaire d'améliorer notre modèle élémentaire du gaz parfait (§ 5 du chap. 1) pour mieux tenir compte de la réalité moléculaire, même si celle-ci n'est qu'approchée.

6.1 Notion de section efficace

Nous savons que les molécules (ou atomes) interagissent par différentes forces (électrostatiques, magnétiques, etc.). Lorsque ces particules sont libres de se mouvoir, ces interactions sont responsables — au cours de collisions où il n'y a pas obligatoirement contact physique — d'échanges de quantité de mouvement : la description de ce phénomène est fortement simplifiée par l'introduction de la notion de *section efficace* σ, nouvelle *propriété microscopique moyenne d'une molécule.*

Le modèle simpliste des boules de billard va nous permettre de comprendre ce que l'on entend par là; *supposons la particule* (1) *immobile* (fig. 7.7 a) : la particule (2) ne la rencontrera que si sa trajectoire (C) passe à une distance d inférieure à $2a$, diamètre des particules. De ce point de vue, il est équivalent d'attribuer à la particule (1), supposée immobile, le rayon $2a$ et de considérer (2) comme ponctuel (fig. 7.7 b) : (1) devient une cible d'aire effective :

$$\sigma = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2. \tag{7.15}$$

σ est *la section efficace de collision* [entre les deux particules identiques (1) et (2)].

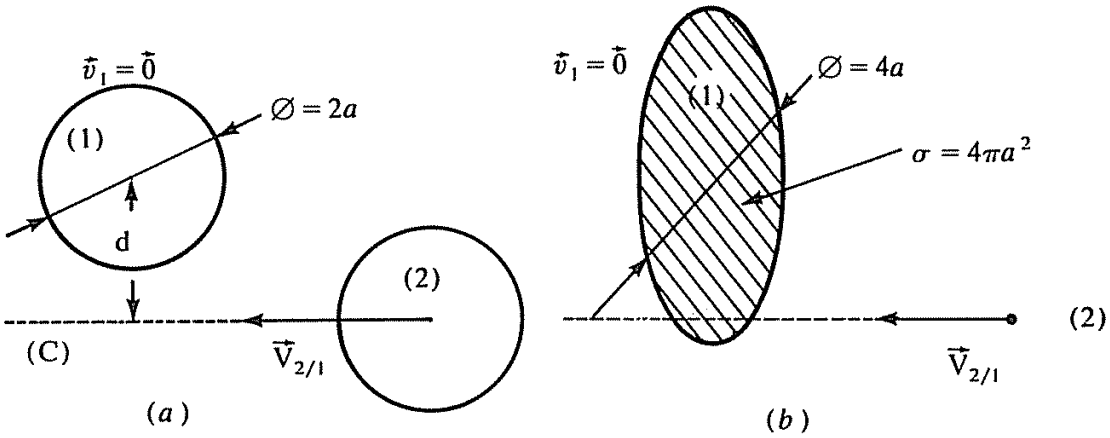


FIG. 7.7

Remarquons que dans l'exemple des boules de billard, il y a coïncidence entre le diamètre physique des boules et la portée réelle des interactions : une interaction entre deux sphères dures est équivalente à un potentiel de répulsion infini pour $d < 2a$ et nul pour $d > 2a$. Dans les atomes et molécules réels, le concept de rayon moléculaire n'est pas toujours bien défini, d'autre part la portée des interactions mutuelles dépend souvent de la vitesse relative des particules : les deux grandeurs peuvent donc être très différentes.

6.2 Notion de libre parcours moyen

Nous avons signalé au paragraphe 8 du chapitre 1 que le nombre moyen de chocs par unités d'aire et de temps — c'est-à-dire la densité de flux de particules — vaut $nv_q/\sqrt{6\pi}$ si n représente la concentration volumique de particules de vitesse quadratique moyenne v_q.

Nous allons nous proposer d'estimer combien de collisions par seconde une particule peut subir de la part des autres qui l'entourent et la rencontrent durant leurs déplacements aléatoires. Supposons d'abord la particule (1) immobile, de section efficace σ : il faut bien entendu tenir compte du fait que les particules mobiles peuvent la rencontrer des deux côtés de la cible. Le nombre de chocs par seconde est alors $2(nv_q\sigma)/\sqrt{6\pi}$. Mais en fait (1) n'est pas immobile; soit $\vec{v}_1$ sa vitesse, $\vec{v}_2$ celle d'une autre particule : la vitesse relative de (2) par rapport à (1) vaut :

$$\vec{V}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \longrightarrow \vec{V}_{2/1}^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = V_{2/1}^2 = v_2^2 + v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2.$$

Comme toutes les directions $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont possibles, si nous prenons la moyenne, les molécules étant identiques : $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = v_q^2$, on a donc :

$$V_q^2 = \langle V_{2/1}^2 \rangle = 2v_q^2,$$

et nous obtenons pour cette *vitesse quadratique moyenne relative* la valeur :

$$V_q = \langle V_{2/1}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = v_q \sqrt{2}. \tag{7.16}$$

Soit τ le *temps libre moyen,* c'est-à-dire la durée moyenne entre deux chocs consécutifs : durant cet intervalle de temps, (2) parcourt en moyenne le chemin $V_q\tau$ (fig. 7.7). Puisqu'il n'y a qu'*un choc,* il n'y aura qu'une particule dans le volume $\sigma V_q \tau$ sous-tendu par la section efficace σ de (1), soit :

$$n\sigma V_q \tau = 1,$$

et compte tenu de (7.16) :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma v_q}.} \tag{7.17}$$

La distance moyenne parcourue par une molécule de gaz durant ce temps libre moyen porte le nom de *libre parcours moyen* et est mesurée par $l = v_q \tau$, donc :

$$\boxed{l = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} \quad \text{ou} \quad ln\sigma \sim 1.} \tag{7.18}$$

Ordres de grandeur.
Les rayons atomiques étant de l'ordre de $1\text{Å} = 10^{-10}$ m, nous aurons $\sigma \sim 4\pi \text{Å}^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-19}$ m^2. Si $p = 1$ atm, $T = 273$ K, $n = N_A/\overline{V} = 6{,}02 \cdot 10^{23}/22{,}4 \cdot 10^{-3} \sim 0{,}2 \cdot 10^{26}$ molécules/m^3. On a donc $l \sim 1/0{,}25 \cdot 10^7 = 4 \cdot 10^{-7}$ m $= 0{,}4\ \mu$m. Prenons $v_q \sim 0{,}5 \cdot 10^3$ m$\cdot$s^{-1}, il vient $\tau \sim l/\sqrt{2} v_q = 5 \cdot 10^{-10}$ s $\sim 0{,}5$ ns.

Dans les conditions normales, l et τ sont donc très petits; mais si n diminue — par abaissement de la pression — l et τ peuvent prendre des valeurs importantes; si $p \sim 10^{-6}$ atm, valeur aisément accessible, $n \sim 0{,}2 \cdot 10^{20}$ molécules$\cdot$m^{-3}, $l \sim 0{,}4$ m $= 40$ cm et $\tau \sim 5 \cdot 10^{-4}$ s. Pour de telles conditions, les molécules d'un gaz contenu dans un récipient peuvent alors effectuer des trajets de paroi à paroi sans rencontrer d'autre molécule.

7. THÉORIE CINÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE DES PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

7.1 Le modèle moléculaire

Les phénomènes de transport relatifs à un fluide hors d'équilibre peuvent être étudiés de manière rigoureuse. Toutefois, il est possible d'en

donner une description approximative à l'aide d'une théorie cinétique simplifiée, si l'on admet que :

1° les molécules sont assimilables à des sphères rigides, de section efficace σ, sans interaction tant qu'elles n'entrent pas en contact physique;

2° toutes les molécules se déplacent à la même vitesse $v_q = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{3kT/m}$;

3° toutes les molécules se déplacent en moyenne dans des directions parallèles aux axes du repère (O; x, y, z) c'est-à-dire que 1/6 d'entre elles se déplacent selon $(+x)$, 1/6 selon $(-x)$, 1/6 selon $(+y)$, etc.;

4° la concentration moléculaire n est assez faible pour que la probabilité de collision triple soit négligeable mais assez forte pour que le libre parcours moyen l des molécules soit très petit devant la plus petite dimension du récipient contenant le fluide; cette hypothèse implique qu'il y aura beaucoup plus de collisions intermoléculaires que sur les parois du récipient.

Avec ce modèle, nous allons donc raisonner a priori sur les valeurs moyennes moléculaires (v_q, n, σ, l, τ) et non pas sur les variables moléculaires $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{p})$ que dans une théorie plus élaborée nous serions amenés éventuellement à moyenner, tous calculs faits. Nous allons obtenir ainsi rapidement des résultats certainement exacts du point de vue des équations aux dimensions mais affectés de coefficients numériques approchés.

7.2 La théorie élémentaire des phénomènes de transport

Nous avons eu l'occasion de souligner, pour chaque processus de transport, quelle était l'entité physique transportée et ce que valait sa concentration volumique. Les valeurs C de ces concentrations sont rassemblées dans le tableau 1 où nous avons remplacé ρ, masse volumique, par nm, n représentant le nombre de molécules de masse m par unité de volume.

Tableau 1.

Phénomène considéré	Concentration volumique C	Densité de flux j_C
Diffusion	n	j_n
Conductivité thermique	$nmc_V T$	$\dot{Q}$
Viscosité	nmv_y	p_{yx}

Calculons maintenant la densité de flux j_C de cette entité, c'est-à-dire le flux net à travers une surface (S) d'aire S = 1, située en x et normale à l'axe

des x (fig. 7.8). Dans ce plan et à l'instant t considéré, la concentration vaut $C(x_0, t)$. Les molécules qui atteignent (S) en provenance de $x < x_0$ ont subi leur dernière collision en moyenne à une distance l avant x_0 : elles proviennent donc en moyenne du plan de concentration $C(x_0 - l, t)$. De même, les molécules qui arrivent en (S) en provenant de $x > x_0$ sont en moyenne issues du plan de concentration $C(x_0 + l, t)$. Comme il n'y a en moyenne qu'un sixième des molécules qui se dirige selon $x > 0$ ou $x < 0$ avec la vitesse quadratique moyenne v_q, le flux net de particules traversant l'unité d'aire (S), c'est-à-dire j_C, sera donné par :

$$j_C(x_0, t) = \frac{1}{6} v_q \left[C(x_0 - l, t) - C(x_0 + l, t) \right],$$

somme des flux entrants selon $x > 0$ avec la vitesse v_q et selon $x < 0$ avec la vitesse $-v_q$.

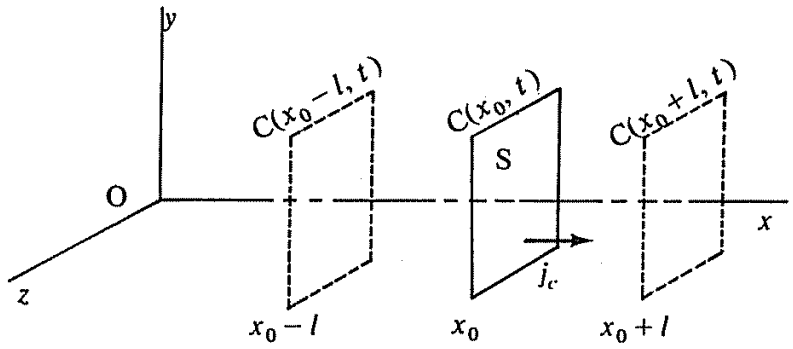


FIG. 7.8

l, libre parcours moyen, est par hypothèse petit : nous pouvons développer $C(x_0 \pm l, t)$ en série de Taylor limitée au premier ordre; il en résulte :

$$C(x_0 \pm l, t) = C(x_0, t) \pm l \left(\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right)_{x_0},$$

d'où :

$$j_C(x_0, t) = \frac{1}{6} v_q \left[-2l \left(\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right)_{x_0} \right] = -\frac{1}{3} v_q l \left(\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right)_{x_0}.$$

Ainsi pour tous les phénomènes de transport, avec les hypothèses ci-dessus :

$$\boxed{j_C(x, t) = -\left(\frac{1}{3} v_q l \right) \frac{\partial C(x, t)}{\partial x}.} \qquad (7.19)$$

Nous trouvons là, la relation générale qui lie la densité de flux j_C de l'entité physique transportée à sa concentration C. Si, de plus, nous écrivons l'équation de continuité correspondante :

$$\boxed{\frac{\partial j_C(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial C(x, t)}{\partial t},} \qquad (7.20)$$

il vient à partir de (7.19) :

$$\boxed{\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{3} v_q l\right) \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2},} \tag{7.21}$$

équation de transport vérifiée par tous les phénomènes étudiés précédemment.

7.3 La définition moléculaire des coefficients de transport

Introduisons les expressions microscopiques de C (voir tableau 1) dans l'équation (7.19). On obtient en remplaçant j_C par la densité de flux correspondante :

- $j_n(x,t) = -\left(\frac{1}{3} v_q l\right) \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} \xrightarrow[(7.2)]{} D = \frac{1}{3} v_q l$;
- $\dot{Q}(x,t) = -\left(\frac{1}{3} v_q l\right) nmc_V \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \xrightarrow[(7.5)]{} K = \frac{1}{3} nmc_V v_q l$;
- $p_y(x,t) = -\left(\frac{1}{3} v_q l\right) nm \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial x} \xrightarrow[(7.7)]{} \eta = \frac{1}{3} nmv_q l.$

Comme $ln\sigma \sim 1$, nous pouvons finalement écrire :

$$\boxed{\begin{array}{c} D \sim \frac{1}{3} v_q l ; \\ \hline K \sim \frac{1}{3} nmc_V v_q l \sim \frac{1}{3} mc_V v_q / \sigma ; \\ \hline \eta \sim \frac{1}{3} nmv_q l \sim \frac{1}{3} mv_q / \sigma. \end{array}} \tag{7.22}$$

En exprimant $\frac{1}{3} v_q l$ en fonction de ces coefficients de transport et compte tenu que $\rho = nm$, nous avons aussi l'identité :

$$\boxed{\frac{1}{3} v_q l \sim D \sim \frac{K}{\rho c_V} \sim \frac{\eta}{\rho},} \tag{7.23}$$

entre les coefficients des équations de transport (7.3, 6 et 9).

7.4 Propriétés des coefficients de transport

1° On peut d'abord vérifier que les coefficients obtenus ont une équation aux dimensions correctes; par exemple, pour D, on obtient : $[D] = [v][L] = [L]^2[T]^{-1}$ conformément à ce qui a été dit au paragraphe 2.2.

2° Si l'on tient compte de ce que pour un gaz parfait :

$$v_q = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \propto \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}, \quad p = nkT \longrightarrow n \propto \frac{p}{T}, \quad l = \frac{1}{n\sigma} \propto \frac{T}{p\sigma},$$

$mc_V = \frac{i}{2}k = \text{constante}$, on a d'après (7.22) :

$$D \propto \frac{T^{3/2}}{p\sigma m^{1/2}}, \quad K \propto \frac{T^{1/2}}{\sigma m^{1/2}}, \quad \eta \propto \frac{m^{1/2}T^{1/2}}{\sigma}.$$

K *et* η *ne dépendent pas de la pression.* Ce résultat surprend a priori car K et η, croissant avec n, devraient augmenter avec p ; en fait, il illustre l'importance du libre parcours moyen : si on double n, on divise l par 2 ($ln\sigma \sim 1$) et il y a deux fois plus de particules pour effectuer le transport sur une distance moyenne deux fois plus courte. Le bilan net est inchangé et c'est ce que l'expérience confirme.

D, K *et* η *dépendent de la température* respectivement comme $T^{3/2}$, $T^{1/2}$ et $T^{1/2}$. En fait, ils dépendent aussi de $1/\sigma$; mais σ est, comme nous le signalons à la fin du paragraphe 6.1, fonction de la vitesse relative V_q des molécules, elle-même proportionnel à $T^{1/2}$ d'après (7.16) : en conclusion ces coefficients varient un peu plus rapidement avec T que ne le font respectivement $T^{3/2}$ et $T^{1/2}$.

Signalons enfin que si cette théorie approchée prévoit selon (7.23) que les rapports $D\rho/\eta$ et $K/\eta c_V = \overline{M}K/\eta\overline{c}_V$ sont égaux à 1, l'expérience donne pour les gaz des valeurs comprises entre 1,3 et 1,5 pour le premier, 1,3 et 2,5 pour le second : cela est conforme à ce qui a été dit au paragraphe 7.1.

8. THÉORIE CINÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE DE LA CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE

Soit un conducteur parcouru par un courant parallèle à Ox sous l'action du champ électrique $E(x) > 0$. Les porteurs de charges sont soumis au champ $\vec{E}$ mais aussi à des collisions avec les ions fixes des conducteurs métalliques ou les molécules neutres des solutions ioniques.

Entre deux chocs, l'équation du mouvement d'un porteur est :

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}, \quad \text{soit :} \quad m\dot{v}_x = qE, \; \dot{v}_y = \dot{v}_z = 0.$$

On vérifiera, a posteriori, que la distance parcourue par le porteur entre deux chocs est faible : on peut donc considérer $E(x)$ comme uniforme puisque variant peu (ou pas) sur cette distance. Si l'on prend l'instant d'un choc comme instant initial, on a :

$$v_x = \frac{qE}{m}t + v_{x_0}, \quad v_y = v_{y_0}, \quad v_z = v_{z_0},$$

en désignant par $\vec{v}_0(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ la vitesse initiale du porteur.

On obtient alors pour les valeurs moyennes des vitesses, *en supposant que les vitesses* $\vec{v}_0$ *des différents porteurs aient toutes les valeurs et directions possibles, et que deux chocs successifs soient séparés par un temps moyen* τ *:*

$$\langle v_x \rangle = \frac{q\tau}{m}E, \quad \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0. \tag{7.24}$$

Les porteurs acquièrent donc une vitesse moyenne proportionnelle à la force $q\mathrm{E}$ comme une particule prend une vitesse limite quand elle est soumise à une force constante dans un milieu visqueux (§ 5.2 du chap. 4, t. 1); mais ici *le résultat est statistique.*

Soit n la concentration volumique en porteurs de charge q; la *charge volumique* ou densité de charge vaut nq. Comme les porteurs qui traversent la surface unité sont contenus dans un cylindre de section $\mathrm{S}=1$ et de longueur $\langle v_x \rangle$, donc de volume $\mathrm{S}\langle v_x \rangle = \langle v_x \rangle$, on obtient pour la densité de courant j_E définie au paragraphe 4 :

$$j_\mathrm{E} = nq\langle v_x \rangle = \frac{nq^2\tau}{m}\,\mathrm{E}. \tag{7.25}$$

Remarques. • Si $q>0$, $\langle v_x \rangle > 0$, si $q<0$, $\langle v_x \rangle < 0$: dans tous les cas $j_\mathrm{E} > 0$.

• Il peut y avoir plusieurs sortes de porteurs de charge : on obtiendrait de même :

$$j_\mathrm{E} = \left(\frac{n_1 q_1^2 \tau_1}{m_1} + \frac{n_2 q_2^2 \tau_2}{m_2} + \ldots\right)\mathrm{E}. \tag{7.26}$$

D'une manière générale, on écrit le résultat (7.24) sous la forme :

$$\boxed{\langle v_x \rangle = \mu_\mathrm{E}\mathrm{E}, \quad \mu_\mathrm{E} = \frac{q\tau}{m},} \tag{7.27}$$

μ_E étant la *mobilité électrique* du porteur; de même, on pose :

$$\boxed{j_\mathrm{E} = \sigma_\mathrm{E}\mathrm{E}, \quad \sigma_\mathrm{E} = \Sigma n_i q_i \mu_i,} \tag{7.28}$$

avec σ_E, conductivité du matériau. On reconnaît dans cette relation la *loi d'Ohm* (7.11), la conductivité σ_E étant maintenant reliée aux propriétés microscopiques du conducteur ohmique.

Ordres de grandeur de σ, μ et τ pour le cuivre ($\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{M}} = 63 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mole^{-1}}$, $\rho_0 \sim 8{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). En supposant que chaque atome libère un électron de conduction ($q = e \sim 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, $m \sim 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$), on obtient $\sigma_\mathrm{E} = 1/\rho \sim 0{,}6 \cdot 10^8\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, $n = \rho_0 \mathrm{N_A}/\overline{\mathrm{M}} \sim 0{,}8 \cdot 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$, $\mu_\mathrm{E} = \sigma_\mathrm{E}/nq \sim 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ SI, $\tau = \mu_\mathrm{E} q/m \sim 0{,}3 \cdot 10^{-13}$ s. Les chocs sont donc extrêmement fréquents : même si un électron allait aussi vite que la lumière, il ne parcourrait entre deux chocs que $c\tau \sim 9\mu\mathrm{m}$ et l'approximation qui a consisté à supposer E uniforme entre deux chocs est pleinement justifiée.

9. DIFFUSION ET MOBILITÉ : LA RELATION D'EINSTEIN

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que les porteurs de charge atteignent en moyenne la vitesse limite :

$$\langle v_x \rangle = \mu_\mathrm{E}\mathrm{E},$$

μ_E étant la *mobilité électrique* du porteur.

Si de façon plus générale, une particule de masse m se déplace sous l'action d'une force constante $\vec{F}_0$ dans un milieu visqueux, son équation dynamique : $m\vec{v} = \vec{F}_0 - \beta\vec{v} (\beta > 0)$ donne pour sa vitesse-limite :

$$\vec{v}_L = \vec{F}_0/\beta = \mu\vec{F}_0, \tag{7.29}$$

ce qui, par analogie, définit la *mobilité* μ de la particule dans ce milieu.

Puisque la force de frottement $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$ est due, d'un point de vue microscopique, aux chocs des particules avec le milieu où elles se déplacent, ces chocs étant aussi responsables de la diffusion moléculaire, il doit y avoir une relation entre D et μ.

En reprenant le raisonnement du paragraphe 8, F_0 remplaçant qE, on obtient de la même façon si $\vec{F}_0 = (F_0, 0, 0)$:

$$\langle v_x \rangle = F_0\tau/m, \quad \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0.$$

Comme $\langle v_x \rangle$ s'identifie alors avec v_L, il vient :

$$v_L = \langle v_x \rangle = F_0\tau/m, \tag{7.30}$$

d'où :

$$\boxed{\mu = 1/\beta = \tau/m.} \tag{7.31}$$

Puisque d'après (7.22), on a : $D \sim \frac{1}{3} v_q l$, il s'en suit :

$$D \sim \frac{1}{3} v_q^2 \frac{l}{v_q} = \frac{1}{3}\left(\frac{3kT}{m}\right)\tau = kT\frac{\tau}{m} = \mu kT,$$

soit *la relation d'Einstein* (1905) entre D et μ :

$$\boxed{D = \mu kT = kT/\beta,} \tag{7.32}$$

qui souligne le lien qui existe entre le mouvement cohérent (d'un point de vue statistique) d'entraînement sous l'action de la force extérieure $\vec{F}_0$ et le mouvement (aléatoire) incohérent de diffusion des particules dans le milieu.

Remarques. • Pour des particules quasi sphériques, de rayon a, [(4.17) du t. 1] donne $\beta = 6\pi\eta a$ et $D = kT/6\pi\eta a$, relation permettant de déterminer le rayon a des particules à partir de la mesure de D et η à la température T. Cette remarque trouve son application en biologie pour atteindre la taille de macromolécules; si celles-ci subissent une dénaturation ou changement de conformation, le coefficient de diffusion D en sera affecté et sa mesure fournit un moyen de suivre l'évolution de ces molécules.

• En combinant des mesures précises de D, de la vitesse de sédimentation v_L de macromolécules ou de virus (dans une expérience d'ultracentrifugation) et du volume spécifique partiel de ces particules, on peut également déterminer leurs poids moléculaires (voir à ce sujet, l'équation de Svedberg dans un ouvrage de biophysique).

8

PROPAGATION DES ONDES ET PHÉNOMÈNES VIBRATOIRES

LES ONDES DE PROPAGATION

1. INTRODUCTION

Jetons une pierre dans une mare : il est aisé de constater qu'une ride circulaire prend naissance au point où la pierre est entrée en contact avec l'eau; consécutivement à cet impact, la surface de l'eau se déforme et cette déformation de courte durée ou *ébranlement* se transmet de proche en proche aux différents points de la surface du liquide. Si par mégarde, au lieu de tomber dans l'eau de la mare, la pierre choît sur le bord boueux, elle s'enfonce dans ce milieu en le déformant de manière quasi permanente : il n'y a pas de propagation de l'ébranlement initial.

Considérons maintenant un long ressort spiralé dont une extrémité est accrochée à un mur et tendons-le en tirant sur l'autre; comprimons quelques spires consécutives et lâchons-les brusquement : en cherchant à retrouver leur position d'équilibre, elles se détendent et compriment par conséquent les spires voisines, permettant alors la propagation de l'ébranlement d'origine.

Prenons enfin une clarinette : en soufflant dans son anche, nous comprimons la tranche d'air contenue à l'intérieur de cet instrument et immédiatement en contact avec l'anche; cette compression rapide — de type adiabatique — est suivie d'une détente de l'air qui comprime la tranche voisine et le processus de propagation de l'ébranlement s'effectue ainsi de proche en proche juqu'à la sortie de la clarinette, puis dans l'air libre pour atteindre le tympan de l'expérimentateur.

Tous ces exemples illustrent la propagation d'un *ébranlement de type élastique :* pour que la déformation initiale ne reste pas localisée à l'endroit où elle a été produite, il faut que le *milieu* où elle se propage soit *élastique,* toute partie du milieu écartée de sa position de repos devant être rappelée vers celle-ci par interaction avec ses voisins. Un ébranlement sonore pouvant, par un tel mécanisme, se propager dans de nombreux milieux élastiques (gaz, liquides, solides), on parlera également de *propagation acoustique* (même si elle n'est pas audible).

Il ne faudrait cependant pas croire qu'un milieu — élastique ou non — soit toujours indispensable à la propagation d'un ébranlement : alors qu'un son ne peut être transmis dans le vide, un flash lumineux s'y développe à une vitesse si élevée ($\sim 300\,000\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$) qu'on a longtemps cru sa transmission instantanée; de même, un radar de grande puissance, pointé vers la Lune, peut envoyer un signal qui, après traversée de l'atmosphère terrestre, se propage dans le vide, se réfléchit partiellement sur la Lune et regagne la Terre après un temps de l'ordre de 2,6 s où il est possible de le détecter.

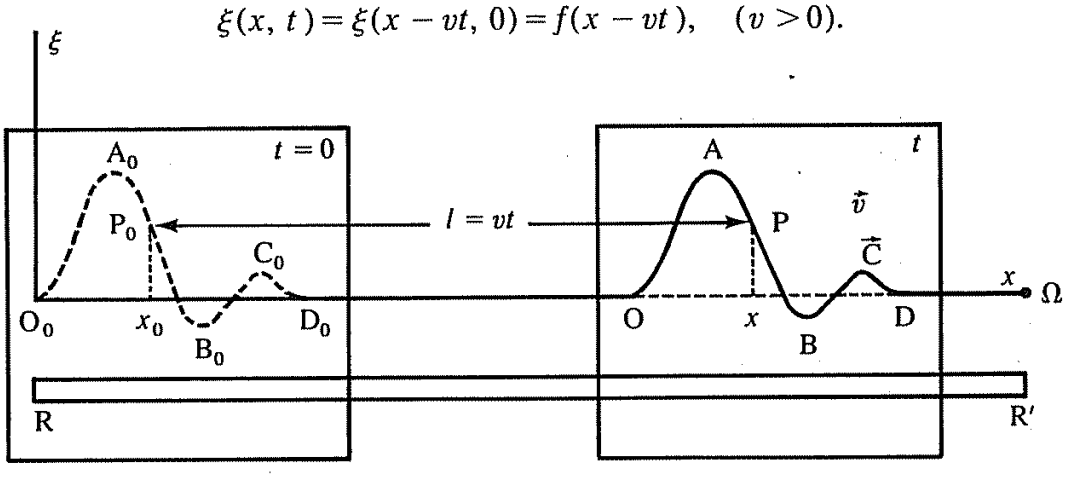
Ces deux exemples ne sont que des cas particuliers d'*ébranlements électromagnétiques* que l'on qualifie aussi de *type lumineux,* puisque la lumière visible en a toutes les caractéristiques.

Les ébranlements acoustiques ou lumineux représentent, par conséquent, des situations physiques fondamentalement différentes mais leurs propriétés mathématiques, liées au fait qu'ils représentent des phénomènes qui se propagent, sont communes. C'est donc de ce point de vue que nous allons les étudier maintenant.

2. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DE LA PROPAGATION D'UN ÉBRANLEMENT

Considérons une corde fixée à une de ses extrémités Ω; l'autre extrémité O_0 reposant dans la main d'un expérimentateur; celui-ci, en secouant localement la corde, induit l'ébranlement $O_0A_0B_0C_0D_0$ (fig. 8.1) qui se propage, par exemple, vers la *droite,* selon $x > 0$. A cet instant $t = 0$, on prend la photographie de l'ébranlement initial $\xi(x, 0) = f(x)$ et de la règle graduée RR′. A l'instant ultérieur t, on photographie de nouveau la corde et la règle : il est ainsi aisé de vérifier que OABCD se superpose à $O_0A_0B_0C_0D_0$ (propagation de l'ébranlement sans déformation) et que toutes les distances de points homologues $\overline{O_0O}$, $\overline{A_0A}$, ... $\overline{D_0D}$ sont égales à l d'où l'on déduit la vitesse de propagation $v = l/t$. Puisque entre deux points homologues $P_0(x_0, 0)$ et $P(x, t)$, il y a la relation : $x - x_0 = l = vt$, tout point x de l'ébranlement observé à l'instant t est homologue du point $x_0 = (x - vt)$ observé à l'instant initial : l'ébranlement a donc pour équation :

$$\xi(x, t) = \xi(x - vt, 0) = f(x - vt), \quad (v > 0).$$



$\xi(x, 0) = f(x)$ FIG. 8.1 $\xi(x, t) = f(x - vt)$

Si le déplacement s'était effectué vers la *gauche,* donc selon $x<0$, il est aisé de vérifier, par le même raisonnement, que l'ébranlement aurait eu pour équation :

$$\xi(x, t)=\xi(x+vt, 0)=f(x+vt), \quad (v>0).$$

La fonction $\xi(x, t)=f(x \pm vt)$ $(v>0)$ décrit une perturbation physique $\xi(x, 0)=f(x)$ qui, observée à l'instant d'origine, se propage *sans déformation. Cet ébranlement de propagation* se déplace, à la vitesse constante v, dans le sens des x croissants $[f(x-vt)]$ ou dans le sens des x décroissants $[f(x+vt)]$.

L'argument algébrique $(x \pm vt)$ de $\xi(x, t)$ est la *phase* de l'ébranlement et v la *vitesse de phase* correspondante.

Remarque : Le changement de signe simultané des variables x et t $(x \longrightarrow -x$, et $t \longrightarrow -t)$ entraîne le changement de phase $x \pm vt \longrightarrow -(x \pm vt)$: cela ne perturbe pas le sens de l'ébranlement; par contre, *changer le signe d'une seule variable* $x \longrightarrow -x$ ou $t \longrightarrow -t$ *revient* au changement de phase $x \pm vt \longrightarrow -(x \mp vt)$ ou $(x \mp vt)$ donc *à la modification du sens de propagation.*
Par exemple, si $\xi(x, t)=\xi_0 \sin[k(x-vt)]$ $(k>0)$, $\xi(-x, -t)=\xi_0 \sin[-k(x-vt)]=+\xi_0 \sin[k(x-vt)+\pi]$: le déplacement se fait toujours vers la droite; comme $\xi(x, -t)=\xi_0 \sin[k(x+vt)]$ on voit, par contre, que $\xi(x, -t)$ représente l'ébranlement $\xi(x, 0)$ qui se propage vers la gauche à la vitesse v.

3. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UN ÉBRANLEMENT DE PROPAGATION

Au cours de sa propagation, un ébranlement vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{8.1}$$

En effet, posons $u=x \pm vt$ dans l'application $\xi(x, t)=f(x \pm vt)$. De $\xi(x, t)=f(u)$, par utilisation du théorème sur la dérivation d'une fonction composée, il résulte :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=f'_u \frac{\partial u}{\partial x}=f'_u \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f'_u)=f''_u \frac{\partial u}{\partial x}=f''_u,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=f'_u \frac{\partial u}{\partial t}=\pm v f'_u \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\pm v f'_u)=\pm v f''_u \frac{\partial u}{\partial t}=(\pm v)^2 f_u,$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=1/v^2,$$

c'est-à-dire (8.1).

Cette équation différentielle du deuxième ordre, à coefficients constants, est une *équation linéaire,* c'est-à-dire que si ξ_1 et ξ_2 en sont des solutions, $\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ (a_1 et a_2 constants quelconques) en est également solution, ce qu'il est facile de contrôler.

Puisque nous savons qu'un ébranlement de type $f(x + vt)$ ne peut être ramené à un ébranlement de type $f(x - vt)$, nous admettrons — bien que cela puisse se démontrer — que la *solution générale* de (8.1) s'écrit :

$$\boxed{\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt),} \qquad (8.2)$$

f_1 et f_2 étant des solutions quelconques de cette même équation:

4. LES PROPRIÉTÉS D'UNE ONDE HARMONIQUE (OU SINUSOÏDALE) DE PROPAGATION

Pour illustrer maintenant le comportement d'un ébranlement de propagation ayant un caractère ondulatoire, examinons ce qui se passe quand on jette un caillou dans une mare où flotte un bouchon. Si nous *négligeons l'atténuation de l'ébranlement* avec la distance, on observe deux phénomènes :

1° A partir de l'endroit O où est tombé le caillou, l'ébranlement de l'eau se propage à la surface de la mare avec une symétrie radiale et sa photographie, *à l'instant* t_0, a l'allure de la figure 8.2a. Pour une direction quelconque de propagation Ox, la coupe de la surface de l'eau, dans un plan vertical contenant Ox (représentée sur la figure 8.2b) a une forme sinusoïdale : la sinusoïde $\xi(x, t_0)$ donne globalement l'état de la surface à l'instant $t = t_0$ et représente donc le déplacement de l'eau par rapport à la position $\xi = 0$ qu'elle occupait au repos, avant l'ébranlement.

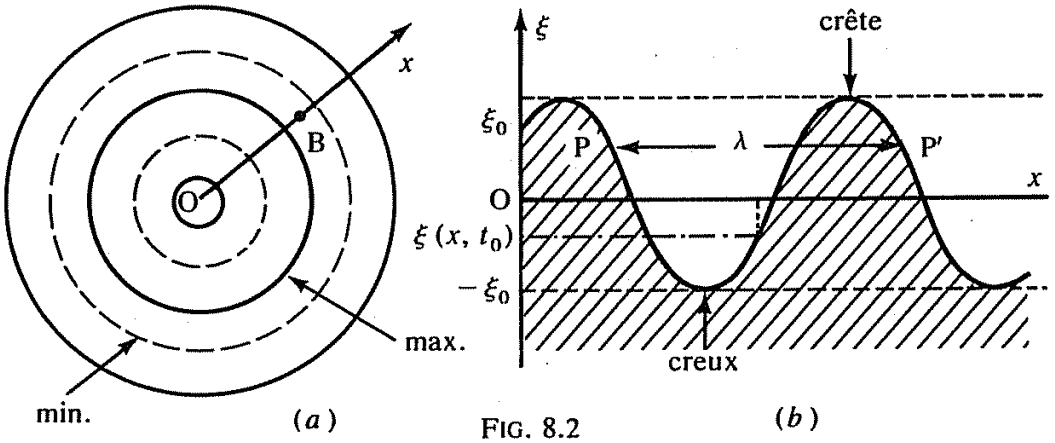


FIG. 8.2

2° En fonction du temps t, le bouchon, placé initialement en B($x = x_0$), oscille sur place selon la verticale du lieu : son mouvement d'oscillation *en* x_0 peut être également décrit par la sinusoïde $\xi(x_0, t)$ (fig. 8.3). Celle-ci indique, en fonction du temps, le mouvement du bouchon, donc de l'eau, et mesure par conséquent en x_0 le déplacement de l'eau par rapport à la position de repos $\xi = 0$.

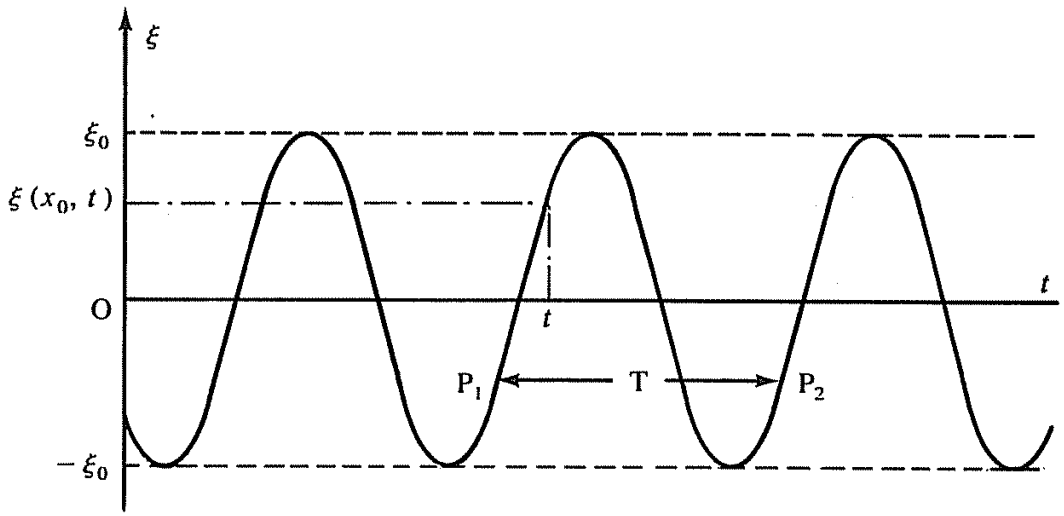


FIG. 8.3

Le déplacement $\xi(x, t)$ de l'eau sera donc au total décrit par *l'onde harmonique de propagation :*

$$\boxed{\xi = \xi_0 \sin[k(x - vt)],} \tag{8.3}$$

où $k > 0$ est une constante homogène à l'inverse d'une longueur de manière à ce que la phase $k(x - vt)$ du sinus soit sans dimension.

Compte tenu maintenant du caractère mathématique de cette fonction trigonométrique, cherchons à quelle condition, deux points P et P′ ont, *à l'instant* t_0, le même état ξ de déplacement (fig. 8.2b). Soit x l'abscisse de P et $(x + \Delta x)$ celle de P′; on doit donc avoir :

$$\xi(x + \Delta x, t_0) = \xi_0 \sin(kx + k\Delta x - kvt_0) = \xi(x, t_0) = \xi_0 \sin(kx - kvt_0),$$

égalité réalisée si : $k\Delta x = m \cdot 2\pi$, (m entier quelconque).
La fonction $\xi(x, t)$ admet par suite une *période spatiale* valant :

$$\boxed{\lambda = 2\pi/k.} \tag{8.4}$$

Le déplacement $\xi(x, t)$ se reproduit identiquement à lui-même tous les λ. Cette période spatiale est la *longueur d'onde* de l'onde de propagation : elle se mesure, selon les circonstances, en m, μm, nm ou Å. Son inverse $1/\lambda$ est le nombre de longueurs d'onde contenues dans une longueur unité : on l'appelle le *nombre d'onde* et on l'exprime généralement en cm^{-1} (exemple : $\lambda = 0{,}5\ \mu m = 5000$ Å, $1/\lambda = 2 \cdot 10^4\ cm^{-1}$); k étant homogène selon (8.4) à $1/\lambda$ se mesure donc aussi en cm^{-1}.

Cherchons de même à quelle condition le point P observé à deux instants différents (fig. 8.3) a le même état ξ de déplacement. Si t et $t + \Delta t$ représentent les instants d'observation de P en x_0, on aura :

$$\xi(x_0, t + \Delta t) = \xi_0 \sin(kx_0 - kvt - kv\Delta t) = \xi(x_0, t) = \xi_0 \sin(kx_0 - kvt),$$

si : $kv\Delta t = m' \cdot 2\pi$, ($m'$ entier quelconque). La fonction $\xi(x, t)$ admet ainsi une *période temporelle* T telle que :

$$\boxed{T = 2\pi/kv.} \tag{8.5}$$

Comme, selon (8.4), $2\pi/k = \lambda$, la période temporelle (appelée plus simplement *période*) est donc reliée à la longueur d'onde par :

$$\boxed{\lambda = v\mathrm{T}.} \tag{8.6}$$

Si par définition $\nu = 1/\mathrm{T}$ mesure la *fréquence temporelle* (plus simplement *fréquence*) de l'onde et $\omega = 2\pi\nu$ la *fréquence angulaire,* on a aussi les relations :

$$\boxed{\nu = 1/\mathrm{T}, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/\mathrm{T},} \tag{8.7}$$

$$\boxed{\lambda\nu = v,} \tag{8.8}$$

et :

$$\boxed{\omega = kv.} \tag{8.9}$$

A partir de ces relations, une onde harmonique de propagation peut encore prendre les formes mathématiques équivalentes :

- $\xi = \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\mathrm{T}}\right) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$, pour un déplacement selon les x croissants;
- $\xi = \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\mathrm{T}}\right) = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$, pour un déplacement selon les x décroissants;

la première écriture faisant particulièrement apparaître la double périodicité spatiale (λ) et temporelle (T) de ces ondes de propagation.

Exemple : Un diapason oscillant à une fréquence de 500 Hz dans l'air où le son se déplace à 330 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ émet une onde sonore de longueur d'onde $\lambda = v/\nu = 330/500 = 0{,}66$ m.

Remarques : • La relation $\lambda = v\mathrm{T}$ entre les deux périodes est évidente : le bouchon effectue sur place une oscillation complète durant le temps T; pour cela, il faut que la déformation de la surface progresse d'une longueur d'onde λ (une crête de ride à la suivante) à la vitesse v : $\mathrm{T} = \lambda/v$, d'où la relation cherchée.

• Pour illustrer le comportement d'une onde harmonique de propagation, on peut dessiner le graphe de $\xi(x, t)$ aux instants t_0, $t_0 + \mathrm{T}/4$, $t_0 + \mathrm{T}/2$, $t_0 + 3\mathrm{T}/4$ et $t_0 + \mathrm{T}$ (fig. 8.4) : au bout d'une période T, l'onde se retrouve identique à elle-même en progressant de $\lambda = v\mathrm{T}$.

• Quand $\omega/k = v$ est un rapport constant, cela signifie que la vitesse de phase est la même pour toutes les ondes harmoniques de propagation : *elle ne dépend que du milieu* dans lequel s'effectue la propagation et on qualifie ce dernier de *non dispersif* (exemples : $v = \sqrt{\mathcal{T}/\mu}$) pour une corde vibrante élastique, de masse linéaire μ, tendue par une tension $\mathcal{T}$; $v = \sqrt{\gamma p/\rho}$ pour une onde de pression dans un gaz, de masse volumique ρ, sous la pression p avec $\gamma = c_p/c_v$; $v = c$ pour une onde électromagnétique dans le vide.

Quand $\omega/k = v(k)$ est fonction de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ la vitesse de phase varie avec l'onde considérée : *elle dépend du milieu et*

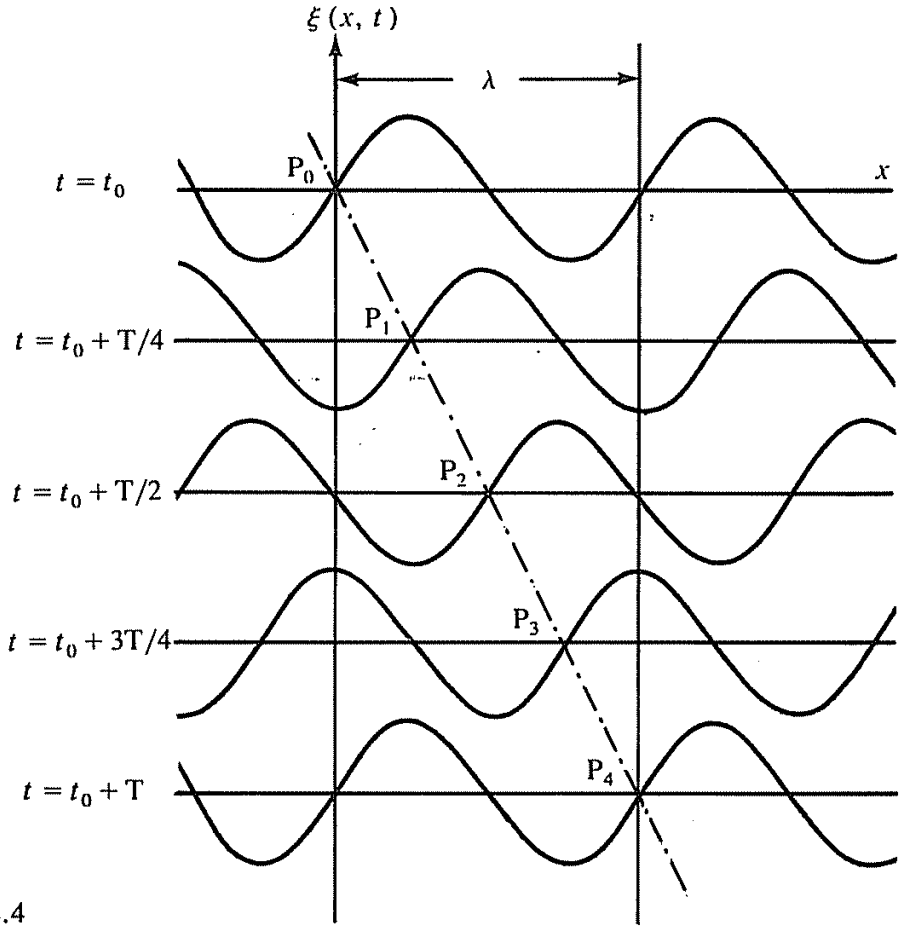


FIG. 8.4

de l'onde, le milieu étant alors dit *dispersif* [exemples : $v^2 = \mathcal{C}/\mu + \alpha k^2$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ pour une corde non parfaitement élastique; $v = c/n(\lambda)$ pour une onde électromagnétique dans un milieu d'indice absolu de réfraction $n(\lambda)$].

5. ONDES DE PROPAGATION

Parmi tous les ébranlements de propagation, il existe une classe particulièrement importante, celle où l'ébranlement initial est réémis de manière périodique (exemples : roulement de tambour, sirène d'usine, lumière émise par une lampe alimentée en courant alternatif, etc.).

Un théorème mathématique, dû à Fourier, dit alors que, dans des conditions très larges de convergence, toute fonction périodique (de fréquence angulaire ω ou de période $T = 2\pi/\omega$) peut être considérée comme la composition de fonctions sinusoïdales (harmoniques) de fréquences respectives ω, 2ω, 3ω, ... ou de périodes T, T/2, T/3, ...

Exemples : • $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,

• $\sin^6 x = \frac{1}{32}(10 - 15\cos 2x + 16\cos 4x - \cos 6x)$.

Considérons donc un ébranlement, de période T, tel que $\xi(x, t + T) = \xi(x, t) = f(x - vt)$. De $\xi(x, t + T) = f[x - v(t + T)] =$

$f[(x - v\mathrm{T}) - vt] = \xi(x - \lambda, t)$ en posant $\lambda = v\mathrm{T}$, il résulte que $\xi(x, t) = \xi(x - \lambda, t)$: cet ébranlement a aussi une période spatiale $\lambda = v\mathrm{T}$; il a le caractère doublement périodique d'une onde harmonique de propagation. Le théorème de Fourier s'applique encore à cette *onde de propagation :* celle-ci peut être considérée comme la composition d'ondes *harmoniques* de propagation, de longueurs d'onde respectives λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$, ... et de périodes respectives T, T/2, T/3..., d'équation générale :

$$\xi_n(x, t) = \xi_{0n} \sin\left[2\pi n\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\mathrm{T}}\right)\right] = \xi_{0n} \sin[n(kx - \omega t)], \quad (8.10)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le théorème de Fourier souligne ainsi le caractère particulièrement important, dans ce chapitre de la physique, des ondes harmoniques de propagation décrites au paragraphe 4.

6. ONDES DE PROPAGATION A DEUX ET TROIS DIMENSIONS

Nous avons dessiné sur la figure 8.5, de façon très schématique, l'ébranlement d'une corde (a) à deux instants t_1 et t_2, ainsi que celui des spires d'un ressort (b). Ces deux situations physiques peuvent être décrites par une fonction $\xi(x, t) = f(x - vt)$ qui représente un ébranlement se dirigeant selon Ox avec la vitesse $\vec{v}$. Elles ont donc une phase de même type mathématique $(x - vt)$. Par contre, elles diffèrent par les mouvements de matière qu'elles induisent en se propageant : la corde se déforme selon Oy, orthogonal à $\vec{v}$, alors que les spires se déforment selon Ox, parallèle à $\vec{v}$.

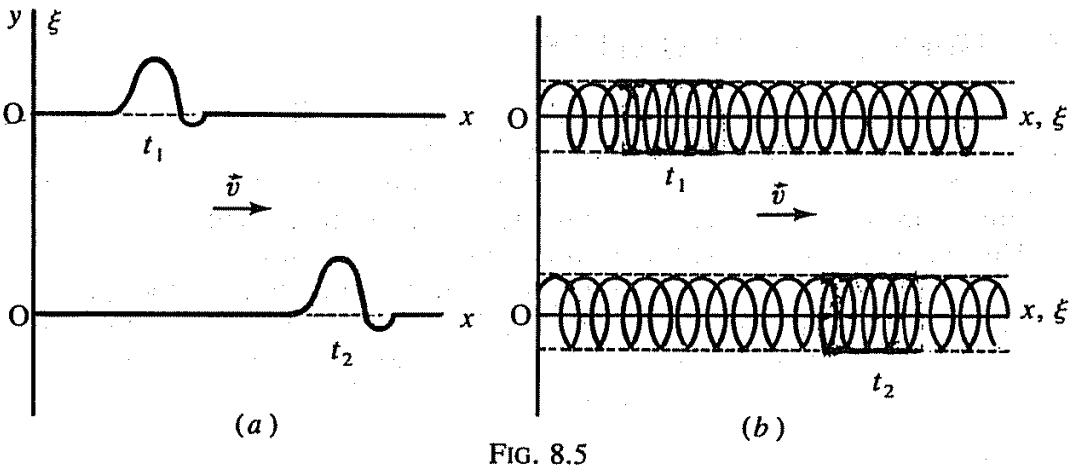


FIG. 8.5

Il faut donc bien distinguer le sens de l'ébranlement (défini par son *état de polarisation*) de son sens de propagation (associé à la forme de son *front d'onde*).

6.1 Polarisation d'une onde de propagation

L'*état de polarisation* d'une onde de propagation définit la direction de l'ébranlement périodique mesuré par $\xi(x, t)$:

— on dit que l'onde est *polarisée longitudinalement* si l'ébranlement ξ s'effectue dans la direction de propagation.

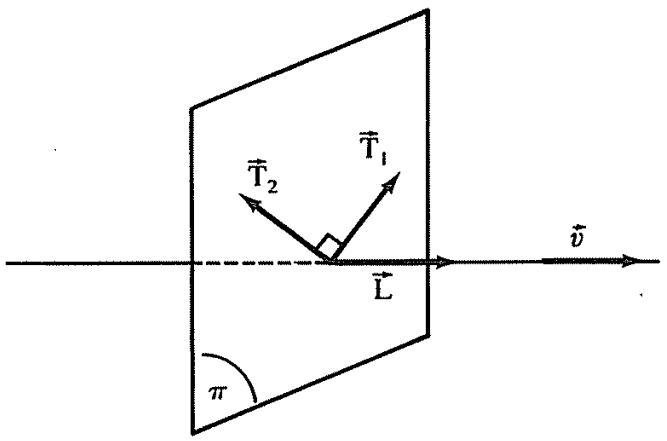
Exemples : • Onde sonore dans tout instrument à vent, onde élastique de compression dans une tige métallique frappée à une de ses extrémités, ressort de la figure 8.5.

— L'onde est dite *polarisée transversalement* si l'ébranlement ξ est orthogonal à la direction de propagation.

Exemples : • Rides à la surface d'un liquide, déformation des cordes d'instruments de musique qu'elles soient pincées ou frappées, ondes électromagnétiques.

Comme à une direction de propagation $\vec{L}$, caractérisée par le vecteur $\vec{v}$, on peut toujours associer un plan orthogonal (π) (fig. 8.6), tout déplacement transversal — donc contenu dans un plan de type (π) — peut lui-même être considéré comme la résultante de deux déplacements rectilignes transversaux selon $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$, avec $\vec{T}_1 \perp \vec{T}_2$.

FIG. 8.6



Le trièdre $\vec{L}$, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ permet donc de définir l'état de polarisation d'une onde de propagation quelconque. Nous reviendrons sur cette notion très importante dans le chapitre suivant en étudiant les propriétés de la lumière polarisée.

6.2 Notion de surface d'onde

1° *Cas d'une onde plane.* Soit une onde de propagation $\xi(x, t) = f(x - vt)$, d'*état de polarisation quelconque,* se déplaçant selon Ox à la vitesse $\vec{v}$. Sa phase $(x - vt)$, *à un instant donné t,* a la même valeur pour

tous les points contenus dans le plan (π) d'abscisse x (fig. 8.7) : *tous les points de* (π) *sont dits* «en phase» et le plan (π) qui les contient est une *surface d'onde* ou un *front d'onde;* $\xi(x, t) = f(x - vt)$ représente donc en fait *une onde plane* se propageant selon $x > 0$ à la vitesse $\vec{v}$. Durant toute sa propagation, le plan d'onde (π) reste orthogonal au vecteur unitaire $\vec{u}$ de la vitesse $\vec{v}$ de l'onde $(\vec{v} = v\vec{u})$.

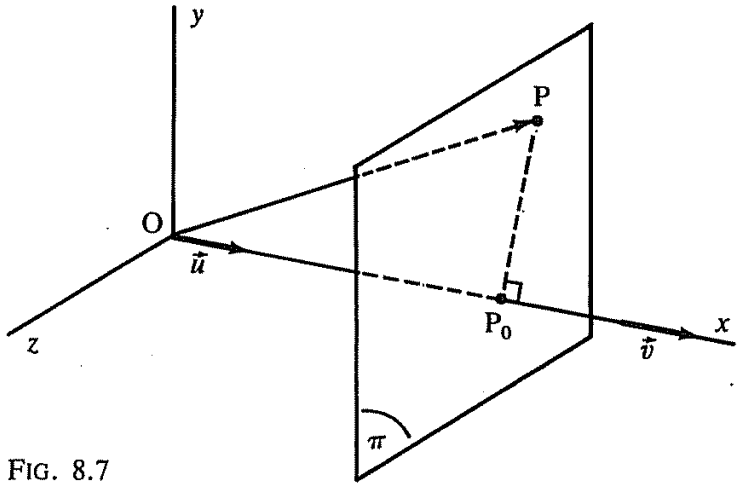


FIG. 8.7

Ce caractère est tout à fait général; considérons un plan d'onde (π), de direction $\vec{u}$ quelconque définie par rapport à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ (fig. 8.8) : la distance P_0 de ce plan à l'origine est mesurée par d (selon la direction $\vec{u}$) et tout point $P \in (\pi)$, située à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ est tel que $\vec{u} \cdot \vec{r} = \overline{OP_0} = d$. L'onde plane (π) de propagation dans la direction $\vec{u}$ s'écrit alors :

$$\boxed{\xi(\vec{r}, t) = f(d - vt) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt).} \qquad (8.11)$$

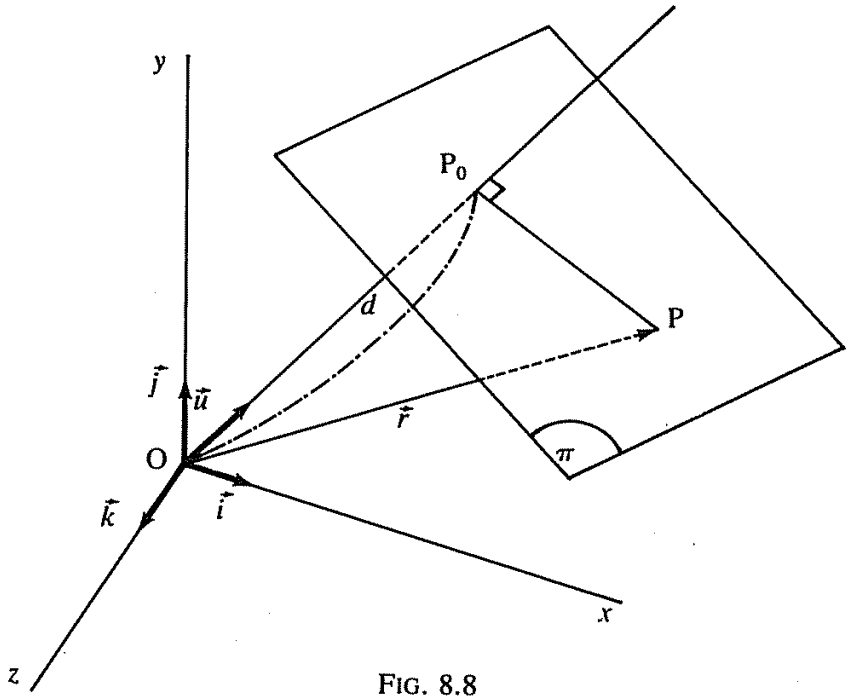


FIG. 8.8

En particulier, si cette onde plane est harmonique, on a :

$$\boxed{\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin\left[k(\vec{u}\cdot\vec{r} - vt)\right] = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t),} \qquad (8.12)$$

$\vec{k}$ étant le *vecteur d'onde* de l'onde plane, défini par :

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u},} \qquad (8.13)$$

donc toujours orthogonal au plan d'onde (π). Si de plus, $\vec{u} = \vec{i}$ vecteur unitaire de l'axe Ox, $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\vec{i}\cdot\vec{r} = kx$: on retrouve le résultat attendu, $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$, pour une onde plane se propageant selon Ox.

Remarque. Considérons le plan d'onde (π') distant de λ du plan d'onde (π); la phase de (π') vaut $\vec{k}\cdot(\vec{r} + \lambda\vec{u}) - \omega t = (\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + 2\pi$: elle diffère de 2π de celle du plan d'onde (π) et par suite l'ébranlement $\xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ a la même valeur dans ces deux plans d'onde séparés de λ.

La périodicité spatiale de l'onde harmonique plane se traduit donc par l'existence de familles de plans d'onde parallèles, de même phase $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ (à un multiple de 2π près), distants consécutivement de λ et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$. Nous avons représenté cette propriété sur la figure 8.9a.

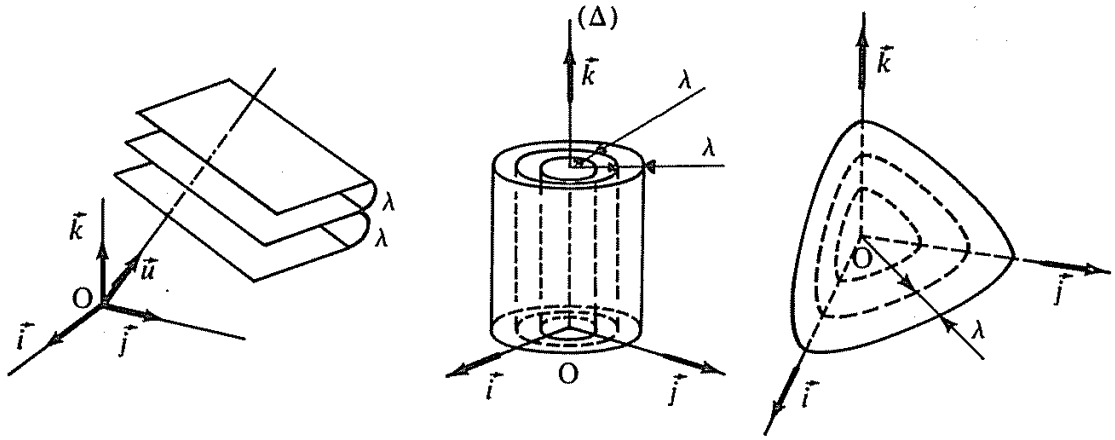


FIG. 8.9

2° *Cas d'une onde cylindrique.* Soit *un ébranlement à symétrie cylindrique* observé à l'instant $t = 0$: tous les points distants de r de l'axe (Δ) sont perturbés de la même manière et leur ébranlement peut être représenté par $\xi(r, 0)$. Par un raisonnement identique à celui déjà utilisé au paragraphe 2, $\xi(r, t) = f(r - vt)$, avec $\vec{v} \perp (\Delta)$, décrit un ébranlement de propagation se déplaçant à la vitesse v : tous les points de même phase $(r - vt)$, à un instant donné, appartiennent à une surface d'onde en forme de *cylindre* (Γ) *concentrique de* (Δ). Si cet ébranlement est une onde harmonique, il aura la même valeur sur toutes les surfaces d'onde distantes consécutivement de λ (fig. 8.9b).

3° *Cas d'une onde sphérique.* De même, $f(r - vt)$ décrit un ébranlement de propagation à symétrie sphérique si la vitesse de déplacement v est la même dans toutes les directions de l'espace : les surfaces d'onde (Σ) de phase $(r - vt)$ constante, à un instant donné, sont des sphères concentriques. Lorsque l'ébranlement est une onde harmonique, il aura la même valeur sur toutes les sphères concentriques séparées de λ (fig. 8.9c).

6.3 Intensité d'une onde de propagation

Une onde de propagation manifeste sa présence par les effets qu'elle produit dans l'espace : c'est ainsi qu'une onde acoustique est capable de déplacer *localement* de la matière (déformation d'une corde élastique, compression d'une colonne gazeuse, vibration longitudinale d'une tige rigide, membrane de haut-parleur,...), de même qu'une onde électromagnétique, par le champ électrique qui lui est associé, peut mettre en mouvement des particules chargées (électrons d'une antenne réceptrice d'une onde radio, effet photo-électrique, effet Compton,...). Ces manifestations supposent un transfert d'énergie de la source de l'onde au milieu où s'effectue le déplacement, le transport étant réalisé par l'onde elle-même.

A chaque période, l'onde reçoit, de la source qui l'entretient, une quantité d'énergie déterminée et la redistribue par sa propagation dans l'espace. On peut donc dire que le *flux d'énergie* E_0 *de l'onde*, c'est-à-dire l'énergie moyenne transportée par unité de temps à travers toute l'aire d'une surface d'onde, *est constant.*

Les ébranlements $\xi(\vec{r}, t)$ de l'onde, localisés au voisinage des points qu'ils déplacent, dépendront eux de l'énergie transportée dans le même voisinage, c'est-à-dire de *l'intensité* I *de l'onde,* ou *densité de flux d'énergie* (énergie moyenne transportée par unité de temps à travers l'unité d'aire) : *nous admettrons que l'amplitude au carré de l'onde de propagation est proportionnelle à* I.

Ainsi, si nous considérons une onde harmonique plane, dont le plan d'onde (π) a l'aire A, nous avons : $I = E_0/A = \text{constante}$, et l'amplitude $\xi_0 \propto \sqrt{I}$ de l'onde plane est également constante :

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (\xi_0 = \text{constante}).$$

Pour une onde sphérique, le flux d'énergie E_0 se trouve réparti, au bout d'un certain temps, sur une surface d'onde sphérique (Σ) d'aire $4\pi r^2$; l'intensité $I = E_0/\pi r^2$ n'est donc pas constante puisqu'elle décroît avec le carré de la distance : il en est de même pour sa racine carrée et nous poserons ξ_0/r pour l'amplitude de l'onde harmonique sphérique :

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin[k(r - vt)]. \tag{8.14}$$

Il en résulte que les déplacements ξ s'atténuent au fur et à mesure que l'onde progresse, ce qu'il est aisé de constater dans le cas d'une pierre tombant dans l'eau.

6.4 Isotropie et anisotropie des milieux de propagation

Lorsqu'un ébranlement, induit en un point O de l'espace, se déplace dans toutes les directions de $\mathcal{E}$ avec la même vitesse v, on dit que le milieu est *isotrope*. Nous avons fait implicitement cette hypothèse dans tous les exemples traités jusqu'alors puisque la forme des surfaces d'onde ne dépend pas de leur vitesse de propagation.

Il existe des milieux où cette vitesse de propagation n'est pas constante dans toutes les directions de $\mathcal{E}$: on les qualifie d'*anisotropes;* dans un tel milieu une onde sphérique à l'émission ne peut le rester au cours de sa propagation (exemple : déformation d'une onde radio se déplaçant dans l'atmosphère terrestre où v varie avec la masse volumique ρ de l'air et sa température T). Nous reviendrons sur cette propriété dans l'étude de la lumière polarisée au chapitre 9.

7. LE PRINCIPE ET LA CONSTRUCTION D'HUYGHENS

Le paragraphe précédent nous a familiarisés avec quelques types de surfaces d'onde. Rappelons que ces surfaces sont le lieu de tous les points d'un ébranlement de propagation caractérisés par la même phase. Autrement dit, si nous considérons par exemple une onde plane de propagation de vitesse v dans la direction $\vec{k}$, nous savons qu'elle est représentée par :

$$\xi(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t).$$

L'équation correspondante de ses surfaces d'onde est donnée en conséquence par :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constante}, \tag{8.15}$$

ce qui *à t donné* correspond bien à des plans orthogonaux à $\vec{k}$.

De même, une onde de propagation sphérique :

$$\xi(\vec{r} \cdot t) = \frac{\xi_0}{r} f(r \pm vt),$$

implique pour l'équation de ses surfaces d'onde :

$$r \pm vt = \text{constante}. \tag{8.16}$$

A t donné, ce sont bien des sphères concentriques.

Selon Huyghens, si l'on admet que *tout point d'un milieu isotrope atteint par une surface d'onde devient un émetteur secondaire d'ondes sphériques,* il est aisé de suivre par construction la propagation d'une surface d'onde.

Par exemple, considérons à l'instant t, une onde plane (π) dans un milieu isotrope (fig. 8.10a) : tout point (A, B, C) de (π) est, selon le principe d'Huyghens, source secondaire d'une onde sphérique qui se déplace à la vitesse v dans toutes les directions; au bout d'une période T, les ondes réémises ont le même rayon $\lambda = v\mathrm{T}$ et le nouveau front d'onde est l'enveloppe de toutes ces sphères c'est-à-dire le plan tangent (π'). Sa distance à (π) est naturellement λ.

Si la surface d'onde, à l'instant t, est la sphère (S) (fig. 8.10 b), tout point de (S) émet dans ce milieu des ondes secondaires sphériques : après une période T, ces sphères ont le rayon $\lambda = vt$ et leur enveloppe, la sphère (S'), est le nouveau front d'onde distant de λ de (S).

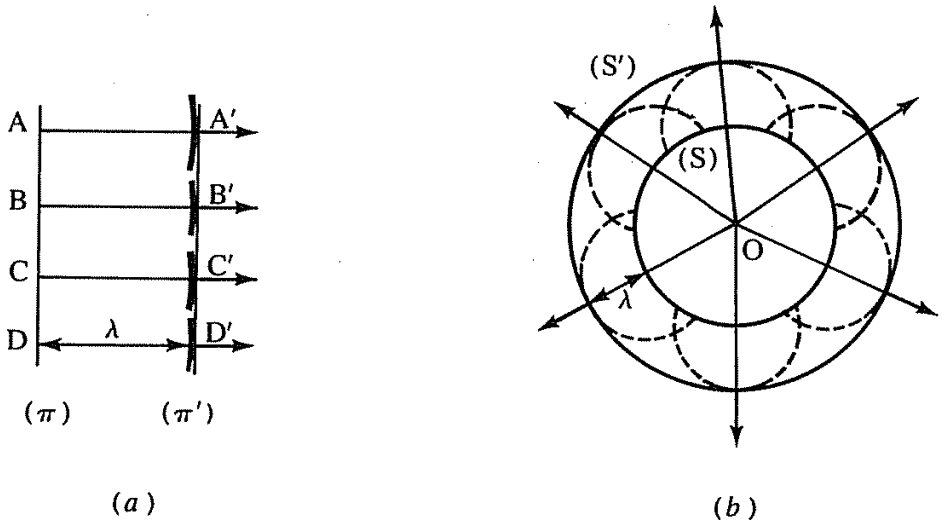


FIG. 8.10

Le raisonnement s'applique de proche en proche sans difficulté et est applicable à toute forme de surface d'onde pourvu que le milieu soit isotrope (fig. 8.11). Dans le cas où l'onde passe d'un milieu à un autre, il faut tout simplement tenir compte de la vitesse de propagation — non obligatoirement la même — de chaque milieu pour calculer les rayons des ondes sphériques secondaires (voir, par exemple, le paragraphe 1.1 du chapitre 10).

Si le milieu est anisotrope, la construction d'Huyghens est encore utilisable mais les sources secondaires n'émettent plus alors d'ondes sphériques. C'est le cas, par exemple, d'un solide biréfringent (§ 10 du chap. 9).

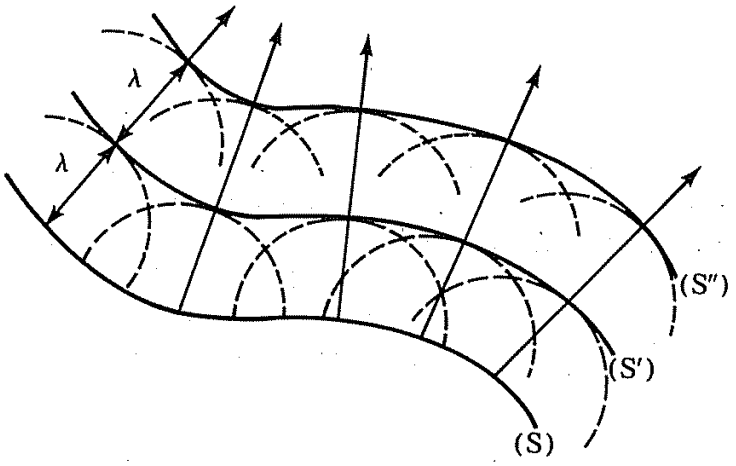


FIG. 8.11

8. L'EFFET DOPPLER

8.1 Principe de l'effet Doppler

Considérons une source (S) d'ondes sonores sphériques se déplaçant, par exemple sur la droite (Δ), avec la vitesse $\vec{v}_s$ dans un milieu isotrope; observons plusieurs positions consécutives P_1, P_2, P_3, P_4 de cette source séparées de la distance $v_s T$, T étant la période de l'onde émise par (S) (fig. 8.12). Si v est la vitesse de propagation de cette onde, quand (S) arrive en P_4 à l'instant t, l'onde émise en P_3 à l'instant $(t - T)$ a un front d'onde sphérique de rayon $\lambda = vT$ centré sur P_3, celui émis en P_2 à l'instant $(t - 2T)$ le rayon $2\lambda = 2vT$ centré en P_2, et celui émis en P_1 le rayon $3\lambda = 3vT$ centré en P_1. *Ces fronts d'onde sphérique non concentriques* sont plus concentrés dans la direction $\vec{v}_s$ où la source (S) se déplace, plus espacés dans la direction opposée $-\vec{v}_s$: cela ne doit pas nous surprendre la vitesse relative V de l'onde par rapport à la source étant égale à $v - v_s$ dans le sens de $\vec{v}_s$, $v + v_s$ dans le sens contraire.

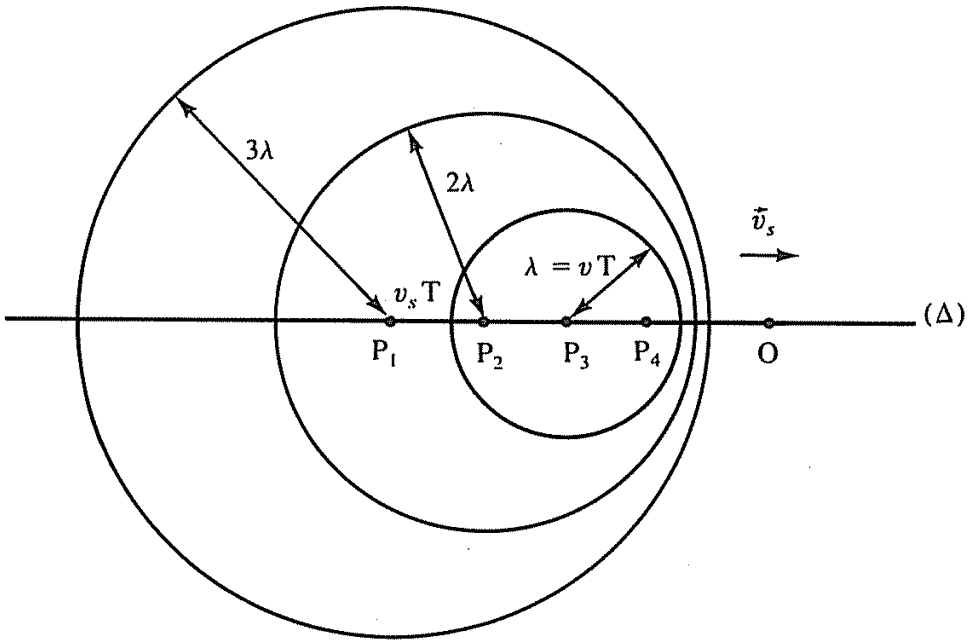


FIG. 8.12

Pour un observateur (O) immobile le long de (Δ) et voyant venir (S), ce sont donc les fronts d'onde rapprochés qui l'atteignent d'abord, puis les fronts d'onde espacés quand la source s'éloigne de lui : deux fronts d'onde consécutifs étant distants d'une longueur d'onde sonore, tout se passe pour l'observateur (O) comme si l'onde qui vient à sa rencontre avait une longueur d'onde plus courte (c'est-à-dire une fréquence plus grande) que celle qui s'éloigne : quand (S) s'approche de (O), le son reçu par l'observateur voit donc son intensité augmenter ($\xi \propto 1/r \longrightarrow I \propto \xi^2 \nearrow$ quand $r \searrow$) et dès que la source dépasse (O), son intensité diminue en même temps que *sa tonalité devient plus grave*. Cet effet Doppler est aisé à observer quand un train siffle ou une voiture klaxonne en se dirigeant vers l'observateur.

Naturellement, quand l'observateur (O) est lui-même en mouvement à la vitesse v_0, les ondes l'atteignent à des vitesses encore différentes : si (O) se rapproche de la source, la longueur d'onde observée sera encore plus faible donc la fréquence plus élevée et ce sera le contraire s'il s'éloigne de (S).

On peut alors montrer que si l'observateur (O) et la source (S) se déplace sur la même droite (Δ), la fréquence ν observée par (O) est donnée par :

$$\boxed{\nu = \nu_0 \left(\frac{v - v_0}{v - v_s} \right),} \tag{8.17}$$

ν_0 désignant la fréquence propre de la source (S).

Si v_0 et v_s sont très petits devant v (ce qui est le cas en général quand l'onde émise par (S) est lumineuse), (8.17) devient, compte tenu de ce que v_0/v et $v_s/v \ll 1$:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_0 - v_s}{v} \right), \tag{8.18}$$

$(v_0 - v_s)$ étant la vitesse relative $v_{0/s}$ de l'observateur par rapport à la source.

Si $\vec{v}_{0/s}$ n'est pas dans la direction de déplacement $\vec{v}_s$, alors en désignant par θ l'angle $(\vec{v}_s, \vec{v}_{0/s})$, (8.18) doit être remplacé évidemment par :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_0 - v_s}{v} \cos \theta \right), \tag{8.19}$$

$(v_0 - v_s)\cos\theta = v_{0/s} \cos\theta$ étant la composante relative de $\vec{v}_{0/s}$ selon la direction de déplacement $\vec{v}_s$ de la source.

L'effet Doppler permet de rendre compte, en acoustique, de l'onde de choc que constitue le son intense et bref qui accompagne le passage d'un avion supersonique. On le rencontre également en physique atomique, dans l'étude spectroscopique de la lumière émise par des gaz en mouvement, ainsi qu'en astrophysique, puisqu'il se manifeste par le déplacement vers le rouge du spectre visible de la lumière provenant d'étoiles qui s'éloignent de la Terre.

En médecine et physiologie, on l'utilise pour mesurer la vitesse du sang. L'effet Doppler d'ondes acoustiques (quelques MHz) focalisées sur une petite région d'un vaisseau sanguin permet de déceler et même localiser des insuffisances circulatoires.

8.2 La spermovélocimétrie par effet Doppler

Les observations physiologiques montrent que chez l'homme fécond, il y a en moyenne 60 % de spermatozoïdes mobiles dans le sperme; ce pourcentage peut être bien inférieur, voire nul chez les hommes infertiles.

Un pronostic de stérilité et son traitement éventuel nécessitent donc la mesure de la vitesse de déplacement des spermatozoïdes d'une goutte de sperme pour estimer le taux de mobilité spermatique : la mesure objective de ce taux, réalisée au microscope optique, sur des particules de vitesse moyenne 80 $\mu m \cdot s^{-1}$ est donc très difficile à réaliser. Par contre, la mesure de l'effet Doppler $\Delta\nu = \nu - \nu_0$ sur la lumière visible diffusée, dans la direction θ, par le sperme en mouvement conduit aux distributions spectrales rassemblées dans la figure 8.13 :

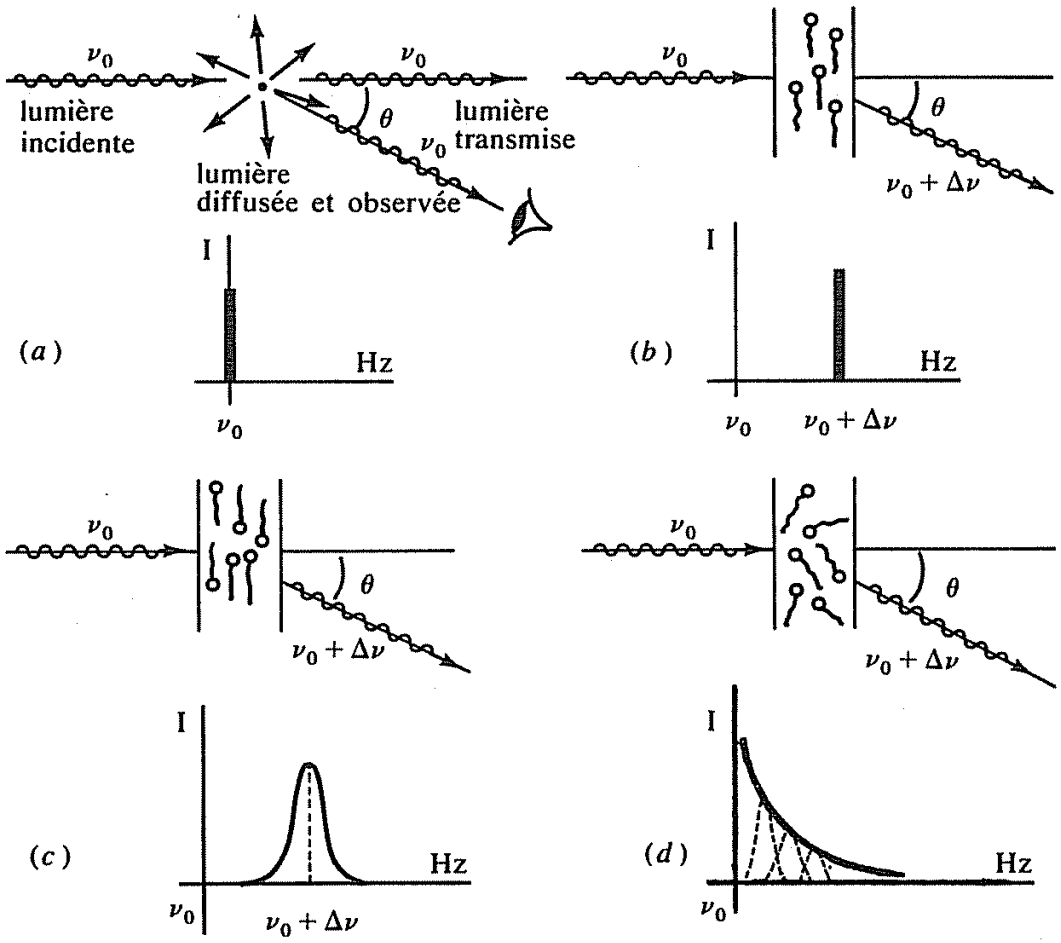


FIG. 8.13

a) intensité lumineuse observée, de fréquence ν_0, si le diffuseur est immobile;

b) déplacement du signal précédent de ν_0 en $\nu_0 + \Delta\nu$ pour un mouvement unidirectionnel à vitesse unique [relation (8.19)];

c) intensité du signal diffusé si le mouvement étant toujours unidirectionnel, les vitesses des spermatozoïdes ne sont pas les mêmes;

d) intensité dans le cas où toutes les directions et les vitesses sont possibles.

Pour fixer les idées sur la haute résolution qu'exigent de telles mesures, avec la vitesse moyenne ci-dessus et un angle d'observation $\theta \sim 10°$, le déplacement $\Delta\nu$ est de l'ordre de quelques dizaines de hertz, soit 10^{13} fois plus faible que la fréquence ν_0 de la lumière utilisée.

LES PHÉNOMÈNES VIBRATOIRES

9. LA COMPOSITION DES ONDES HARMONIQUES DE PROPAGATION

Considérons deux cailloux que l'on jette dans une mare et qui atteignent sa surface en deux points distincts S_1 et S_2 (fig. 8.14). Chacun d'eux induit une onde harmonique circulaire de propagation transversale, d'amplitudes

respectives ξ_{01}, et ξ_{02}, de fréquences ω_1 et ω_2, de nombres d'onde k_1 et k_2 avec : $\omega_1/k_1 = \omega_2/k_2 = v$, vitesse de propagation des ondes ne dépendant que des caractéristiques physiques du milieu. Comme rien n'oblige les cailloux à toucher l'eau simultanément, nous appellerons δ_0 la différence des phases initiales des deux ondes et écrirons :

$$\xi_1(r, t) = \xi_{01} \sin(k_1 r - \omega_1 t), \quad \xi_2(r', t) = \xi_{02} \sin(k_2 r' - \omega_2 t + \delta_0).$$

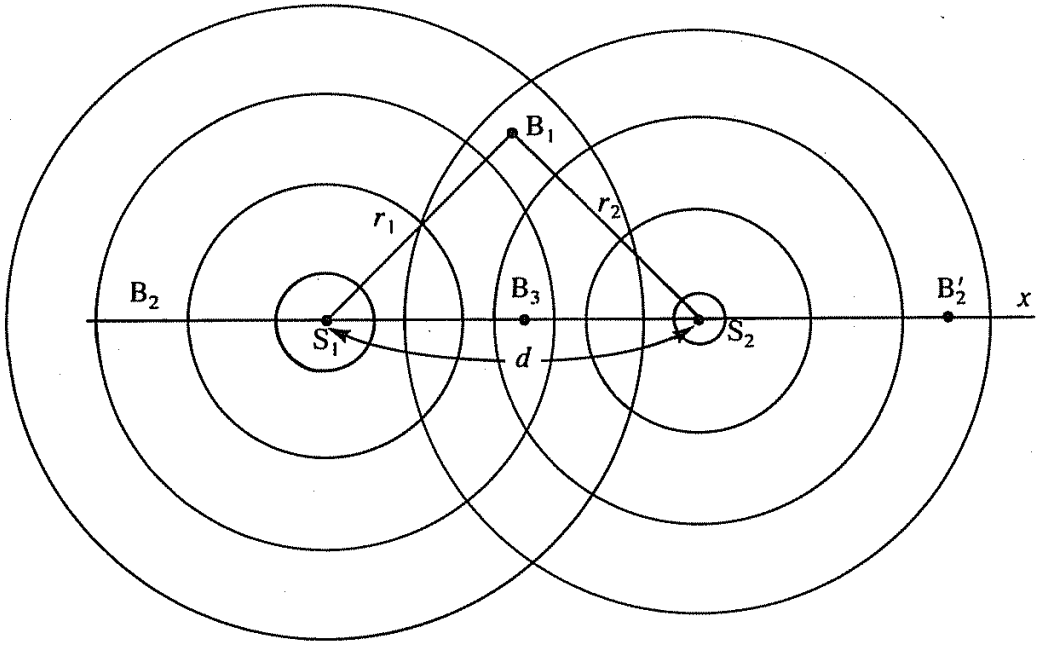


FIG. 8.14

Plaçons un bouchon en B_1 et posons $S_1B_1 = r_1$, $S_2B_1 = r_2$. Chaque onde, de même polarisation transversale, ajoute algébriquement ses effets en B_1 et le mouvement du bouchon selon la verticale du lieu en ce point est donné par :

$$\xi(r_1, r_2, t) = \xi_{01} \sin(k_1 r_1 - \omega_1 t) + \xi_{02} \sin(k_2 r_2 - \omega_2 t + \delta_0). \tag{8.20}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\xi(t, r_1, r_2) = \xi_{01} \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \pi) + \xi_{02} \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 - \delta_0 + \pi);$$

pour une position donnée (r_1, r_2) de B_1 : $\alpha_1 = -k_1 r_1 + \pi$ et $\alpha_2 = -k_2 r_2 - \delta_0 + \pi$ sont des angles constants et nous pouvons dire que le mouvement du bouchon en B_1 résulte, par application du principe de superposition, de la composition :

$$\boxed{\xi(t) = \xi_{01} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \xi_{02} \sin(\omega_2 t + \alpha_2),} \tag{8.21}$$

de deux mouvements vibratoires harmoniques d'amplitudes respectives ξ_{01} et ξ_{02}, de fréquences ω_1 et ω_2, de phases initiales α_1 et α_2 et dont la différence de phase est donnée par :

$$\boxed{\delta = (\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1) \quad \text{avec} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = k_1 r_1 - k_2 r_2 - \delta_0.} \tag{8.22}$$

Plusieurs cas simplificateurs peuvent alors être envisagés pour ces ondes ayant le même état de polarisation :

1° Les ondes ont la même fréquence ($\omega = \omega_1 = \omega_2$) et par suite, la même longueur d'onde ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$). On étudie alors la *composition* (ou *interférence*) de deux mouvements harmoniques de même fréquence :

a) elles ont la *même direction de propagation :* cela se produit dans le cas d'un bouchon placé en B_2 ou B_2' sur l'axe S_1S_2;

b) elles se propagent dans l'*espace :* on réalise des *interférences* spatiales comme en B_1;

c) elles ont des *directions de propagation opposées* (par exemple, comme en B_3) : on observe des *ondes stationnaires,* phénomène que l'on peut aussi obtenir par la composition d'une onde avec une autre réfléchie sur un obstacle fixe.

2° Leurs fréquences ne sont pas les mêmes ($\omega_1 \neq \omega_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ou $v_1 \neq v_2$) : on obtient le phénomène de *battement.*

La caractéristique mathématique commune de tous ces phénomènes provient de l'expression (8.21) : on peut considérer $\xi(t)$ comme la projection du vecteur tournant de Fresnel $\overrightarrow{OP}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OP}_1$ et $\overrightarrow{OP}_2$ dont les projections respectives (sur le même axe) sont $\xi_{01} \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$ et $\xi_{02} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$. (Revoir à ce sujet les propriétés des vecteurs de Fresnel décrites au chapitre 8 du tome 1.)

Ajoutons qu'on peut considérer encore d'autres cas comme celui de la superposition de deux ondes harmoniques de même fréquence et de même direction de propagation mais dont les états de polarisation $\vec{\xi}_{01}$ et $\vec{\xi}_{02}$ sont orthogonaux : nous l'examinerons en détail dans l'étude de la lumière polarisée au chapitre 9.

A part le cas ci-dessus où les états de polarisation sont orthogonaux tous les autres sont caractérisés par le même état de polarisation; celui-ci peut être de *type scalaire* (ondes longitudinales) ou de *type vectoriel* (ondes transversales) : si les ondes transversales ont la même direction de polarisation, on peut ajouter les valeurs algébriques de $\vec{\xi}_1$ et $\vec{\xi}_2$ comme pour les ondes longitudinales et le principe de superposition leur est appliqué de manière similaire.

Notons enfin que les effets étudiés ci-après sont particulièrement importants quand les ondes qui interfèrent ont des amplitudes du même ordre de grandeur et des fréquences voisines; dans le cas contraire, les deux ondes se propagent sans donner lieu à un effet notable.

10. INTERFÉRENCE DE DEUX ONDES HARMONIQUES, DE MÊME ÉTAT DE POLARISATION ET DE MÊME FRÉQUENCE

10.1 Ondes ayant la même direction de propagation

D'après (8.21), si nous considérons deux ondes harmoniques de même état de polarisation, d'amplitudes ξ_{01} et ξ_{02}, de fréquence ω, de phase à

l'origine α_1 et α_2, se composant en un point de leur direction commune de propagation, cela revient à étudier la somme :

$$\xi(t) = \xi_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) + \xi_{02} \sin(\omega t + \alpha_2), \qquad (8.23)$$

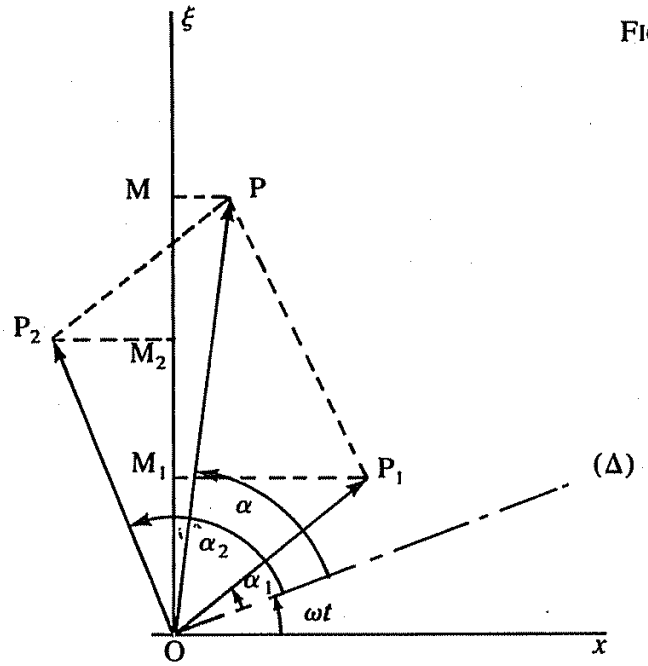
le mouvement résultant ayant le même état de polarisation que ses composantes.

Soit (Δ), l'axe dont l'angle orienté avec Ox est mesuré par ωt :

$$\omega t = (Ox, \Delta).$$

Par rapport à (Δ), nous pouvons construire les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$, de normes respectives ξ_{01} et ξ_{02}, d'angles $\alpha_1 = (\Delta, \overrightarrow{OP_1})$ et $\alpha_2 = (\Delta, \overrightarrow{OP_2})$ (fig. 8.15). Leurs projections, sur la direction (ξ) orthogonale à Ox, sont mesurées par : $\xi_1(t) = \xi_{01} \sin(\omega t + \alpha_1)$ et $\xi_2(t) = \xi_{02} \sin(\omega t + \alpha_2)$.

FIG. 8.15



D'après (8.23), le vecteur $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ a pour projection sur (ξ) la somme des projections des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$; par conséquent :

$$\xi(t) = \text{proj}_{\xi} \overrightarrow{OP} = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

si nous appelons ξ_0 la norme de $\overrightarrow{OP}$ et α l'angle $(\Delta, \overrightarrow{OP})$.

De $\overrightarrow{OP}^2 = (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})^2$, il résulte que :

$$\boxed{\xi_0 = \left[\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]^{1/2};} \qquad (8.24)$$

de plus, projetant $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ sur (Δ) et l'axe qui lui est orthogonal; nous avons :

$$\xi_0 \cos\alpha = \xi_{01} \cos\alpha_1 + \xi_{02} \cos\alpha_2,$$
$$\xi_0 \sin\alpha = \xi_{01} \sin\alpha_1 + \xi_{02} \sin\alpha_2,$$

soit :
$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\xi_{01}\sin\alpha_1 + \xi_{02}\sin\alpha_2}{\xi_{01}\cos\alpha_1 + \xi_{02}\cos\alpha_2}.} \qquad (8.25)$$

Comme $(\alpha_2 - \alpha_1)$, α_1, α_2, ξ_{01} et ξ_{02} sont des paramètres constants, nous en concluons que :

> la composition de deux ondes harmoniques, de même état de polarisation, de même fréquence ω et de même direction de propagation est un mouvement harmonique, d'équation :
> $$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$
> de fréquence ω, d'amplitude ξ_0 donnée par (8.24) et de phase à l'origine α définie par (8.25).

Du § 9, il résulte de plus que $\alpha_1 = -kr_1 + \pi$ et $\alpha_2 = \alpha_1 + kd - \delta_0$ où $d = |S_1S_2|$. Ceci entraîne que ce mouvement est en fait une *onde harmonique de propagation,* propriété qui apparaît clairement dans les cas particuliers ci-dessous où la phase de $\xi(t)$ vaut : $\omega t + \alpha = \omega t - kr_1 + C^{te}$:

- $\alpha_2 = \alpha_1 + n \times 2\pi$, ($n$ entier) : par définition, les phases à l'origine étant égales, les *deux mouvements sont dits en phase.* Les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$ sont alors parallèles (fig. 8.16a) et l'on a :
$$\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}, \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2. \qquad (8.26)$$

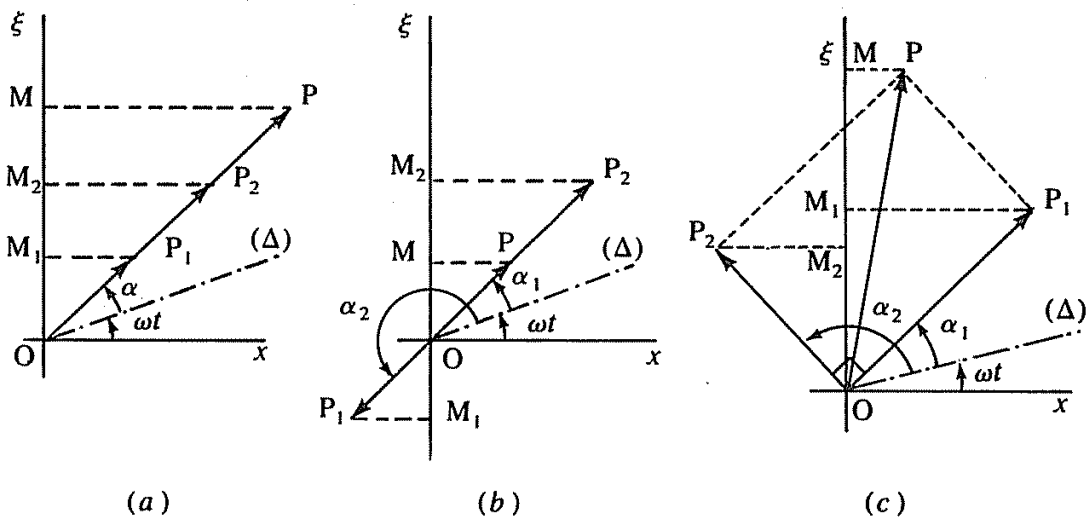


FIG. 8.16

Deux mouvements harmoniques de même fréquence et en phase interfèrent en renforçant leurs effets puisque les amplitudes s'additionnent : on parle encore d'*interférence constructive* en tout point de la direction de propagation.

• $\alpha_2 = \alpha_1 + (2n+1)\pi$, ($n$ entier) : par définition, les mouvements sont dits en *opposition de phase*. Leurs vecteurs tournants $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$ sont antiparallèles (fig. 8.16b) et on en déduit :

$$\xi_0 = |\xi_{01} - \xi_{02}|, \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \pm \pi. \tag{8.27}$$

Deux mouvements harmoniques de même fréquence et en opposition de phase interfèrent en atténuant leurs effets puisque les amplitudes se soustraient : on parle d'*interférence destructive.*

• $\alpha_2 = \alpha_1 + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, ($n$ entier) : les *deux mouvements sont dits en quadrature* (fig. 8.16c) avec :

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2}, \quad \alpha = \alpha_1 \pm \alpha' \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\alpha' = \xi_{02}/\xi_{01}; \tag{8.28}$$

(si $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\xi_{01}\sin\alpha_1 \pm \xi_{02}\cos\alpha_1}{\xi_{01}\cos\alpha_1 \mp \xi_{02}\sin\alpha_1}$; posons : $\operatorname{tg}\alpha' = \xi_{02}/\xi_{01}$, il en résulte :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha' \pm \cos\alpha_1\sin\alpha'}{\cos\alpha_1\cos\alpha' \mp \sin\alpha_1\sin\alpha'} = \frac{\sin(\alpha_1 \pm \alpha')}{\cos(\alpha_1 \pm \alpha')} = \operatorname{tg}(\alpha_1 \pm \alpha'),$$

soit : $\alpha = \alpha_1 \pm \alpha'$).

10.2 Interférences spatiales

Considérons maintenant deux sources ponctuelles S_1 et S_2 *oscillant en phase,* à la même fréquence ω : dans ces conditions, elles sont qualifiées de *synchrones*. Supposons de plus que les ondes sphériques qu'elles émettent dans l'espace sont des ondes sphériques de même état de polarisation : leur amplitude varie avec la distance r d'observation et nous incluerons cette dépendance dans l'expression des amplitudes $\xi_{01}(r)$ et $\xi_{02}(r)$ de ces ondes.

Dans ces conditions (8.21) est encore valable avec $\omega = \omega_1 = \omega_2$, $k = k_1 = k_2$:

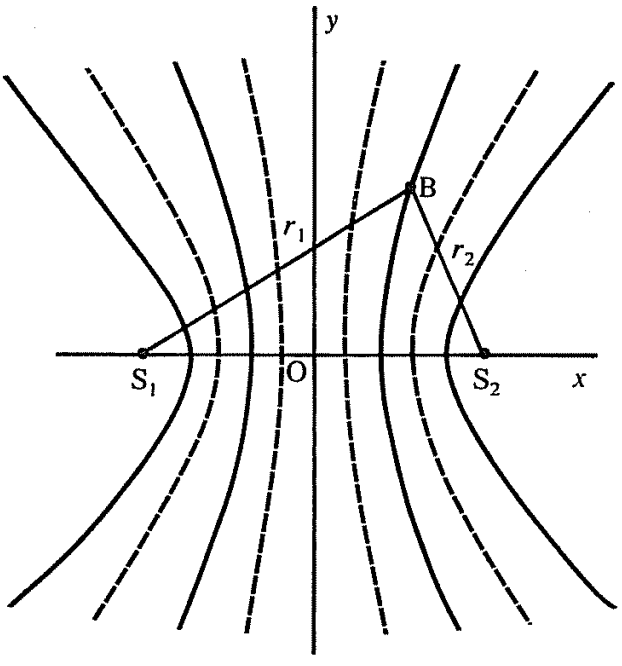


FIG. 8.17

$\xi(t) = \xi_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) + \xi_{02} \sin(\omega t + \alpha_2)$,
$\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = k(r_1 - r_2)$, (car $\delta_0 = 0$ par hypothèse).

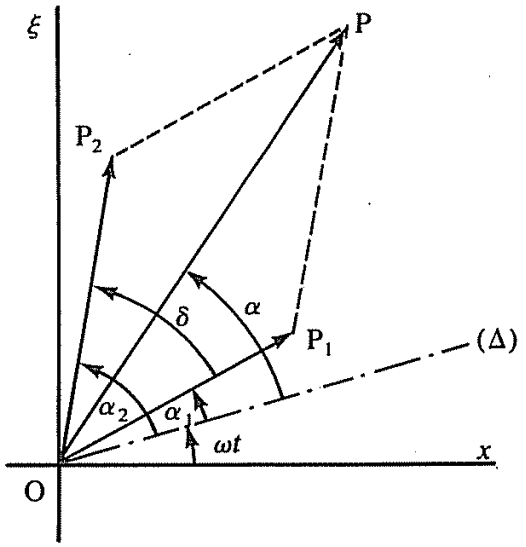


FIG. 8.18

En un point B (fig. 8.17) tel que $r_1 = S_1B$, $r_2 = S_2B$, les deux ondes de propagation s'additionnent, leur déphasage étant mesuré par :

$$\boxed{\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2),} \qquad (8.29)$$

si λ est la longueur d'onde commune des ondes.

Remarquons que, contrairement au cas 10.1, $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ n'est plus constant car dépendant du choix (r_1, r_2) du point d'observation B.

La méthode de Fresnel s'applique encore ici (fig. 8.18). (8.24) nous donne l'amplitude de l'onde résultante :

$$\xi_0 = (\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos \delta)^{1/2}. \qquad (8.30)$$

Celle-ci varie entre $|\xi_{01} - \xi_{02}|$ et $\xi_{01} + \xi_{02}$, respectivement pour $\cos \delta = -1$ et $+1$, c'est-à-dire $\delta = (2n + 1)\pi$ et $\delta = 2n\pi (n$ entier).

1° Si $\delta = (2n + 1)\pi$, $\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi \longrightarrow r_1 - r_2 = (2n + 1)\dfrac{\lambda}{2}$.

Pour $\delta = (2n + 1)\pi$ ou $r_1 - r_2 = (2n + 1)\dfrac{\lambda}{2}$, on observe des *interférences destructives,* les ondes soustrayant leurs effets : $\xi_0 = |\xi_{01} - \xi_{02}|$ a une valeur minimale.

2° Si $\delta = 2n\pi$, $\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi \longrightarrow r_1 - r_2 = 2n\dfrac{\lambda}{2} = n\lambda$.

Pour $\delta = 2n\pi$ ou $r_1 - r_2 = n\lambda$, on observe des *interférences constructives*, les ondes ajoutant leurs effets : $\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$.

Mais $r_2 - r_1 =$ constante représente dans $\mathcal{E}$ des *hyperboloïdes de révolution*, d'axe S_1S_2, de foyers S_1 et S_2. Les interférences constructives se produisent donc sur les hyperboloïdes d'équation : $r_1 - r_2 = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots$, *surfaces ventrales* où les ondes interfèrent en renforçant leurs effets; quant aux interférences destructives, elles ont lieu sur les hyperboloïdes : $r_1 - r_2 = \pm\lambda/2, \pm 3\lambda/2, \ldots$, *surfaces nodales* où les ondes interfèrent en atténuant leurs effets : les surfaces nodales sont donc intercalées entre les surfaces ventrales, la distance qui les sépare, mesurée sur l'axe S_1S_2, étant d'une demi-longueur d'onde.

Si on considère un plan passant par cet axe, il coupe les hyperboloïdes selon des hyperboles de foyers S_1 et S_2 : c'est ce qui apparaît sur la figure 8.17.

En chaque point de l'espace, l'onde résultante a pour amplitude ξ_0 donné par (8.30) et la phase α mesurée par l'angle $(\Delta, \overrightarrow{OP})$ que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe (Δ) défini par $(Ox, \Delta) = \omega t$ (fig. 8.18). Pour un point B considéré, α_1, α_2, α et δ sont des angles constants : *l'onde résultante*, d'équation :

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

n'est donc pas une onde de propagation mais une onde stationnaire pour laquelle le déplacement a une amplitude donnée en chaque point de l'espace. Cela provient de ce que les deux sources S_1 et S_2 ont la même fréquence et un déphasage constant : elles sont encore dites *cohérentes*.

Si les sources sont *incohérentes* (fréquences non identiques ou déphasage variant de manière aléatoire avec le temps), on ne peut observer de telles figures d'interférences. Ce sera le cas avec les sources lumineuses usuelles (ampoule électrique, tube à décharge) constituées de nombreux atomes qui peuvent émettre des ondes sphériques de même fréquence mais sans relation de phase. Par contre, si nous considérons deux pointes vibrant en synchronisme à la surface d'une cuvette pleine d'eau, un jeu d'onde stationnaire s'établit, car les sources sont cohérentes par construction.

Supposons maintenant que la distance d de séparation des sources S_1 et S_2 soit petite devant la distance d'observation D : si les sources sont identiques, nous pourrons admettre, dans ce cas, que les amplitudes ξ_{01} et ξ_{02} des ondes sphériques émises par S_1 et S_2 sont sensiblement égales, et (8.30) devient :

$$\xi_0 = \xi_{01}\sqrt{2(1 + \cos\delta)} = 2\xi_{01}\cos\delta/2.$$

Mais la géométrie de la figure 8.19 pour $D \gg d$ et $x = \overline{O'B} \ll D$, entraîne θ petit, $\sin\theta \# \operatorname{tg}\theta = x/D$ et $(r_1 - r_2) \sim S_1A = d\sin\theta \# dx/D$.

Par suite, le déphasage δ vaut :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi dx}{D\lambda}, \qquad (8.31)$$

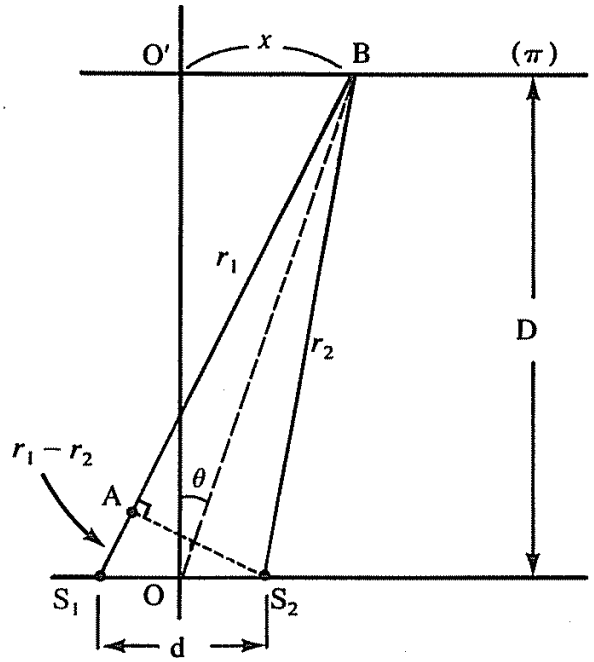


FIG. 8.19

et de plus : $$\xi_0 = 2\xi_{01} \cos\left(\frac{\pi dx}{D\lambda}\right). \qquad (8.32)$$

Si en O′ nous mettons un écran (π), normal à OO′, en supposant les ondes émises lumineuses, nous coupons les surfaces ventrales et nodales et observons sur l'écran des franges alternativement brillantes et sombres : cela est évident d'après (8.32) puisque l'éclairement de l'écran E étant proportionnel à l'énergie reçue, c'est-à-dire à l'intensité I, est donc également proportionnel à ξ_0^2. Nous pouvons écrire :

$$E = E_0 \cos^2\left(\frac{\pi\, dx}{D\lambda}\right),$$

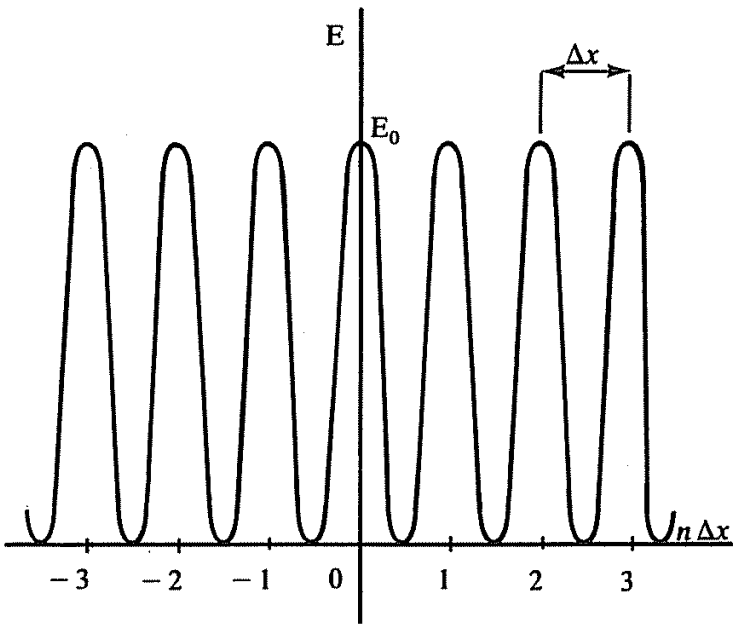


FIG. 8.20

où E_0 représente l'éclairement de l'écran en O' (où $x = 0$); la distribution de cet éclairement sur (π) est schématisée sur la figure 8.20; les points d'éclairement maximal sont donnés par l'égalité :

$$\pi dx/D\lambda = \delta/2 = n\pi, \quad (n \text{ entier}),$$

soit :
$$x = n\frac{D\lambda}{d}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8.33}$$

L'interfrange Δx, distance entre deux franges brillantes successives vaut : $\Delta x = D\lambda/d$; de sa mesure, connaissant d et D, on en déduit la longueur d'onde λ : cette expérience constitue de fait, une des méthodes classiques de mesure des longueurs d'onde d'ondes harmoniques de propagation.

10.3 Ondes stationnaires unidimensionnelles

Dans l'exemple précédent, nous avons vu comment deux sources synchrones peuvent donner naissance à des ondes stationnaires spatiales. Il n'est pas toujours nécessaire d'avoir deux sources car, dans certaines circonstances, une onde de propagation peut, en se réfléchissant sur un milieu différent de celui dans lequel elle se déplace, induire une deuxième onde de propagation qui interférera avec la première.

Prenons, par exemple, une corde fixée à son extrémité O et induisons, par déplacement de l'autre extrémité, une onde de propagation harmonique qui se déplace à la vitesse v vers la gauche : $\xi_1(x, t) = \xi_{01} \sin(\omega t + kx)$. *Par réflexion* sur la paroi fixe située en O (fig. 8.21), une onde de propagation harmonique est créée qui se déplace vers la droite. Son équation sera de manière générale :

$$\xi_2(x, t) = \xi_{02} \sin(\omega' t - k' x),$$

avec $\omega' = vk'$.

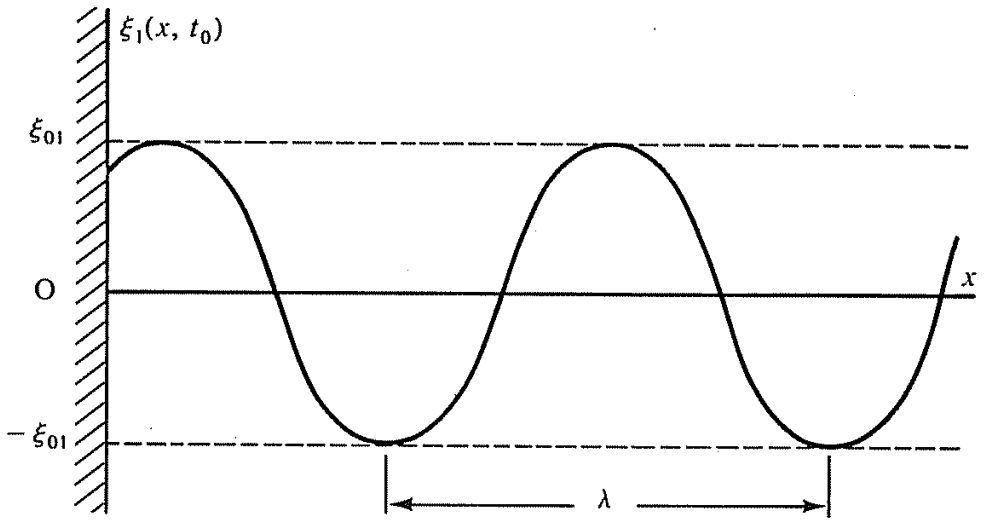


FIG. 8.21

Exprimons qu'au point O la corde est immobile à tout instant; la composition des ondes de déplacement, de même état de polarisation, doit avoir en ce point une résultante nulle :

$$\forall t, \quad \xi(0, t) = \xi_{01} \sin \omega t + \xi_{02} \sin \omega' t = 0,$$

implique $\omega' = \omega$, $k' = k$ et $\xi_{01} + \xi_{02} = 0 \longrightarrow \xi_{02} = -\xi_{01}$.

L'onde réfléchie a la même amplitude, la même fréquence, la même longueur d'onde, et est en opposition de phase par rapport à l'onde incidente :

$$\xi_2(x, t) = \xi_{01} \sin(\omega t - kx + \pi). \tag{8.34}$$

Il en résulte :

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = \xi_{01}[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)],$$

soit :

$$\xi(x, t) = 2\xi_{01} \sin kx \cos \omega t, \tag{8.35}$$

équation d'une *onde stationnaire unidimensionnelle* puisque l'amplitude du mouvement résultant, en un point x donné, est constante. Ce résultat est schématisé sur la figure 8.22 représentant la variation de l'amplitude ξ_0 du mouvement de la corde en fonction de x : $\xi_0(x) = 2\xi_{01} \sin kx$ (ligne en pointillé) et de $\xi(x, t)$ donné par (8.35) (ligne pleine). Les points de type A_1, A_2, ... où la corde est immobile sont des *nœuds;* ils sont définis par :

$$kx_n = n\pi, \quad (n \text{ entier}),$$

c'est-à-dire :

$$x_n = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2},$$

et *deux nœuds consécutifs sont séparés d'une demi-longueur d'onde,* car :

$$x_{n+1} - x_n = [(n+1) - n]\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

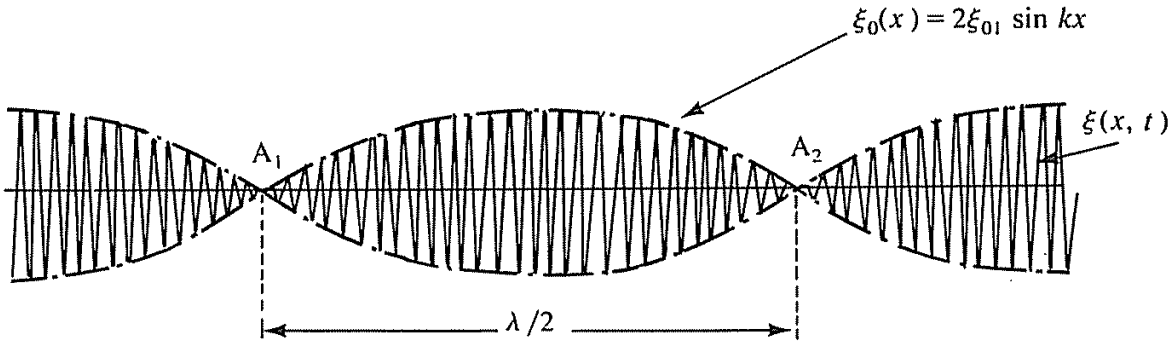


FIG. 8.22

Remarquons, qu'à ce stade de notre étude, toutes les fréquences ω sont autorisées pour l'onde incidente (et l'onde réfléchie) et qu'il en est de même pour les longueurs d'onde ($\lambda = 2\pi/k = 2\pi v/\omega$).

Supposons maintenant que l'autre extrémité de la corde de longueur L soit fixe; nous écrirons alors :

$$\forall t, \quad \xi(L, t) = 2\xi_{01} \sin kL \cos \omega t = 0,$$

soit : $2\xi_{01} \sin kL = 0 \longrightarrow \sin kL = 0,$

d'où la nouvelle condition :

$$\boxed{kL = n\pi \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).} \tag{8.36}$$

Seules les ondes incidentes et réfléchies dont la longueur d'onde λ_n vérifie la condition (8.36) *pourront donner naissance à des ondes stationnaires.* Les fréquences de ces ondes obéissent aussi à une condition similaire :

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = n\nu_1 \quad \text{avec} \quad \nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L},$$

la fréquence associée à la longueur d'onde λ_1 :

$$\boxed{\nu_n = n\nu_1 \quad \text{avec} \quad \nu_1 = v/2L;} \tag{8.37}$$

ν_1 est appelée *fréquence fondamentale : les seules fréquences autorisées ν_n sont les multiples de ν_1* et un couple (ν_n, λ_n) définit un *mode* de vibration. La figure 8.23 montre la distribution des amplitudes $\xi_0(x)$ pour les trois premiers modes ($n = 1$ à 3) de vibration.

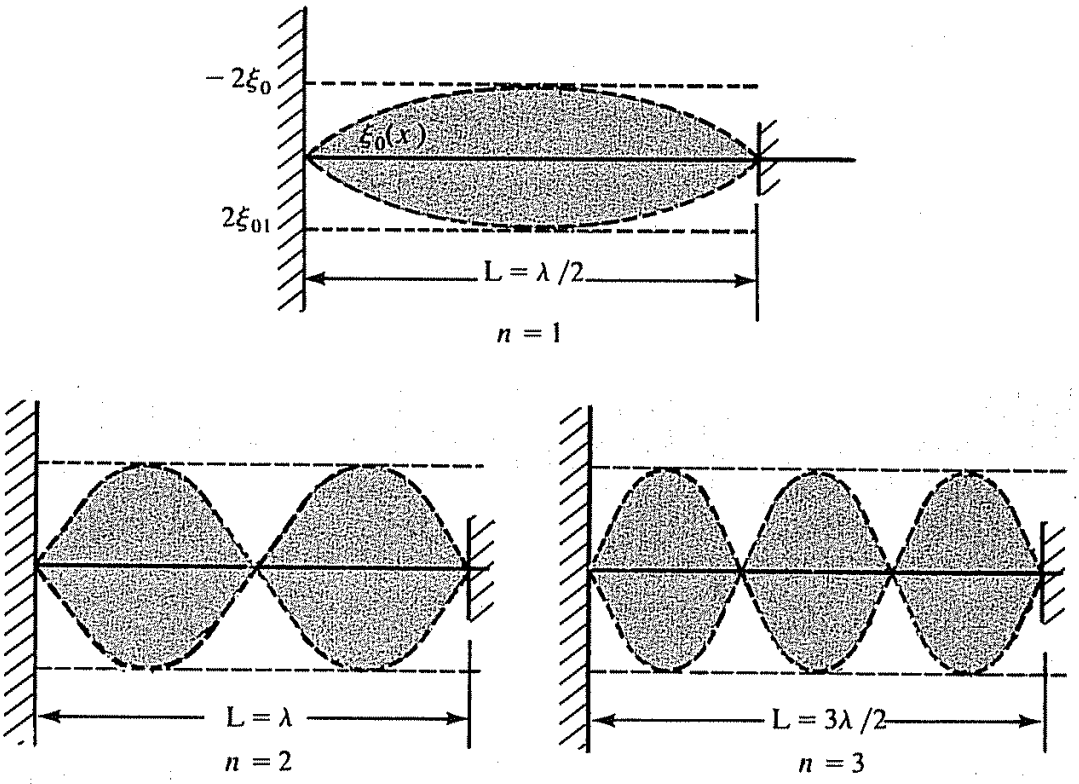


FIG. 8.23

Remarque. Nous pouvons poser d'autres *conditions aux limites* que celles imposées par le mouvement de la corde $(\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0)$: ces conditions dépendent du problème physique considéré.

Par exemple, si la corde a son extrémité en $x = \mathrm{L}$ attachée à un vibrateur d'amplitude A et de fréquence ω, on écrira : $\xi(\mathrm{L}, t) = \mathrm{A} \sin \omega t$; si on étudie un tuyau sonore fermé à ses deux extrémités, on aura $\xi(0, t) = \xi(\mathrm{L}, t) = 0$; mais si ce tuyau a son extrémité L ouverte, on posera $\xi(0, t) = 0$ et on remarquera qu'à l'extrémité libre L, la pression du gaz est donnée par la pression atmosphérique extérieure, etc. A chaque fois, on obtiendra des ondes stationnaires de distributions différentes, mais dont la caractéristique commune est la *quantification* des longueurs d'onde et des fréquences correspondantes; la quantification de certaines grandeurs physiques n'est donc pas réservée à la seule physique atomique.

11. BATTEMENT DE DEUX ONDES HARMONIQUES, DE MÊME ÉTAT DE POLARISATION, DE MÊME DIRECTION DE PROPAGATION ET DE FRÉQUENCES DIFFÉRENTES

Considérons maintenant la composition de deux ondes harmoniques $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$, de même état de polarisation, d'amplitudes ξ_{01} et ξ_{02} de fréquences ω_1 et ω_2 et de phases à l'origine α_1 et α_2, leur direction de propagation étant la même : le mouvement résultant a pour équation selon (8.21) :

$$\xi(t) = \xi_{01} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \xi_{02} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \tag{8.38}$$

$\xi(t)$ ayant l'état de polarisation de ξ_1 et ξ_2.

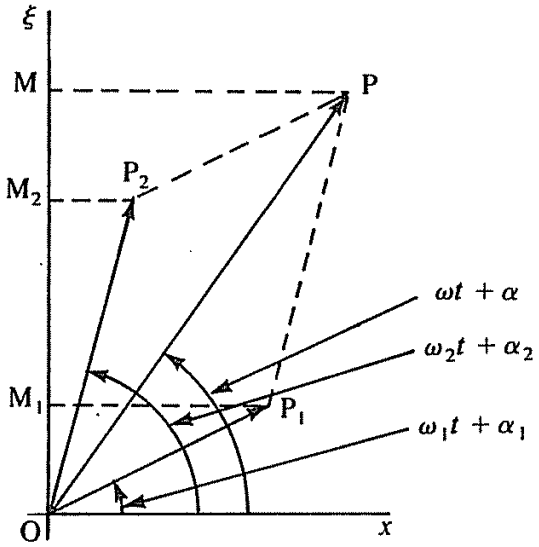


FIG. 8.24

Les vecteurs de Fresnel correspondants (fig. 8.24) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$, ont pour normes ξ_{01}, ξ_{02} et :

$$\xi_0 = [\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos \delta]^{1/2}, \tag{8.39}$$

avec : $$\delta = (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1.$$

Contrairement au cas traité au § 10.1, l'angle δ des deux vecteurs $\overrightarrow{OP}_1$ et $\overrightarrow{OP}_2$ n'est pas constant dans le temps, aussi l'*amplitude* ξ_0 du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est une *fonction périodique* qui varie entre $\xi_{min} = |\xi_{01} - \xi_{02}|$ pour $\cos\delta = -1$ et $\xi_{max} = \xi_{01} + \xi_{02}$ pour $\cos\delta = +1$, la fréquence de ses variations entre ces valeurs extrêmes étant donnée par :

$$2\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| \quad \text{ou} \quad \Delta\nu = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi} = |\nu_2 - \nu_1|. \tag{8.40}$$

On dit que l'*amplitude* ξ_0 *du mouvement résultant* (non harmonique puisque $\xi_0 \neq$ constante) *est modulée* et ce type très particulier de composition prend le nom de *battement*. La variation de $\xi_0(t)$ entre ξ_{min} et ξ_{max} de périodicité $T = 1/|\nu_2 - \nu_1|$ a été représentée sur la figure 8.25.

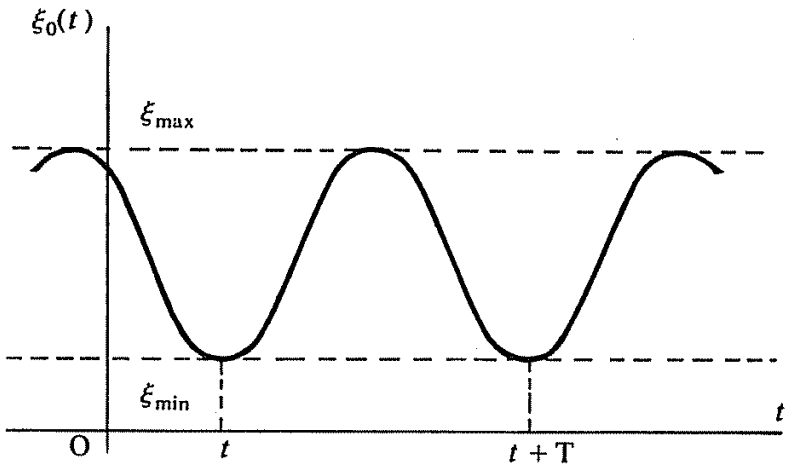


FIG. 8.25

Un tel exemple de battement peut être observé en écoutant deux diapasons, de fréquences assez voisines : le son recueilli par l'oreille de l'observateur a son intensité modulée puisque l'énergie transportée par les deux ondes de propagation varie comme l'amplitude au carré du mouvement résultant (§ 6.3).

Dans cet exemple, on peut admettre que les branches du diapason étant peu différentes : $\xi_{01} = \xi_{02}$; en posant :

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha, \quad \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2} = \Delta\alpha, \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = k,$$

(8.38) devient :

$$\xi(t) = 2\xi_{01} \cos(\Delta\omega t + \Delta\alpha) \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.41}$$

où $2\xi_{01} \cos(\Delta\omega t + \Delta\alpha)$ s'identifie avec l'amplitude ξ_0 calculée en (8.39). α s'écrivant $-kr_1 + C^{te}$, le mouvement résultant (8.41) est celui d'une *onde de propagation non harmonique* puisque d'amplitude ξ_0 variant avec le temps.

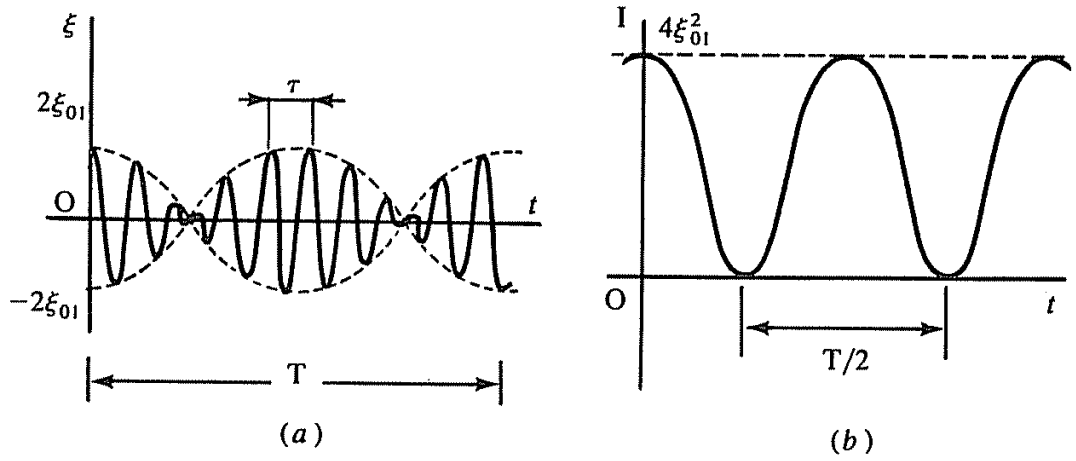


FIG. 8.26

Il peut être considéré (fig. 8.26a) comme décrit par une fonction périodique, de pulsation $(\omega_1 + \omega_2)/2$, dont l'amplitude est modulée dans le temps avec une pulsation $|\omega_1 - \omega_2|/2$; la période de cette amplitude $T = 4\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ est généralement très grande devant celle de l'onde résultante $\tau = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$. Si on examine le graphe (fig. 8.26b) de l'intensité $I \propto \xi_0^2(t)$, on comprend mieux pourquoi, dans le cas des diapasons, l'oreille perçoit la modulation d'amplitude : le son recueilli a une énergie variant (à un facteur de proportionnalité près) entre 0 et $4\xi_{01}^2$ et cette variation d'intensité qui se fait avec une très basse fréquence $|\omega_2 - \omega_1|$ est aisément décelable par l'observateur.

9

LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET LA LUMIÈRE POLARISÉE

GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

1. LA PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Ce que l'on appelle communément *lumière visible* recouvre en fait les vibrations électromagnétiques d'un très petit domaine de fréquences correspondant à la sensibilité de l'œil humain (3,8 à $7{,}7 \cdot 10^{14}$ Hz). La théorie — essentiellement due à Maxwell (1865) — et de très nombreuses expériences nous conduisent à admettre que ces ondes électromagnétiques doivent s'identifier à un champ électromagnétique de propagation, composé d'un champ électrique $\vec{E}$ couplé à un champ magnétique $\vec{B}$, se déplaçant dans le vide à la vitesse c.

Le comportement spatio-temporel de ces champs obéit à une série d'équations aux dérivées partielles établies par Maxwell et nous nous contenterons, ici, d'en examiner seulement quelques conséquences :

1° *Dans le vide,* chacun des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, supposés se déplacer dans la direction Ox de $\mathcal{E}$, vérifie la même équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(x,t)}{\partial t^2}, \qquad (9.1)$$

ε_0 et μ_0 étant respectivement la *permittivité diélectrique* et la *perméabilité magnétique* du vide. L'identification de (9.1) avec (8.1) nous conduit à exprimer la vitesse c de déplacement de l'onde électromagnétique dans le vide par la relation :

$$\boxed{c = \sqrt{1/\varepsilon_0 \mu_0} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.} \qquad (9.2)$$

Remarque : Dans le *Système International*, la perméabilité magnétique μ_0 est définie par la relation :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2};$$

or, nous avons dit au chapitre 4 du tome 1 que, dans le vide :

$$K = 10^{-7}c^2 = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}987\,4 \cdot 10^9 \text{ (SI)},$$

d'où il résulte que :

$$\varepsilon_0 = 1/4\pi K = 10^7/4\pi c^2 = 8{,}854\,3 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2};$$

il vient enfin, par voie de conséquence :

$$\varepsilon_0\mu_0 = (10^7/4\pi c^2)(4\pi \cdot 10^{-7}) = 1/c^2, \text{ conformément à (9.2).}$$

L'invariance de c dans tout référentiel galiléen — un des postulats de la mécanique relativiste d'Einstein — inexplicable dans le cadre de la mécanique newtonienne, a été établie par l'expérience historique de Michelson et Morley, puis par d'autres encore plus précises. La valeur de c admise actuellement est :

$$\boxed{c = 299\,792\,456{,}2 \pm 1{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.} \qquad (9.3)$$

2° Soit une onde électromagnétique plane (π). Les équations de Maxwell impliquent que les champs électrique et magnétique sont *transversaux* par rapport à leur direction de propagation, *orthogonaux entre eux et en phase* (fig. 9.1). La direction de propagation de l'onde plane est donc celle du vecteur $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

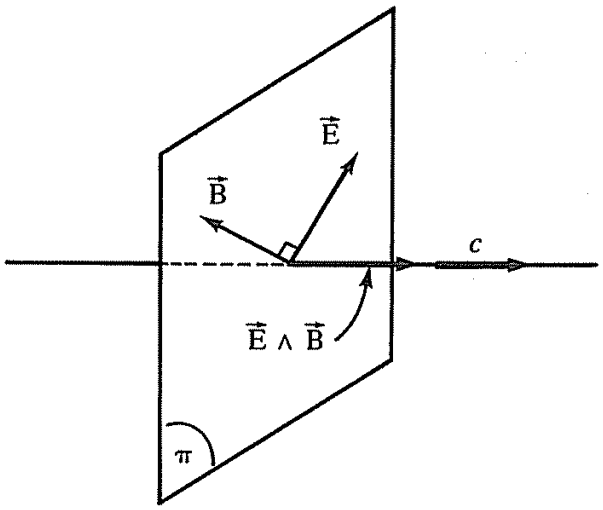


FIG. 9.1

3° Les normes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, mesurées au même instant t_0, vérifient la relation :

$$\boxed{|B(x, t_0)| = \frac{1}{c}\,|E(x, t_0)|,} \qquad (9.4)$$

si B, E et c sont mesurés en unités (SI).

Ainsi nous voyons que *les propriétés de la lumière sont complètement décrites par le comportement du seul champ de propagation électrique*

transversal $\vec{E}$ (fig. 9.2) : si $\vec{E}$ se déplace avec la vitesse $\vec{c}$, $\vec{B}$ se propage dans le plan $(\vec{c}, \vec{E} \wedge \vec{c})$, en phase avec $\vec{E}$, et sa norme est donnée par $|B| = |E|/c$.

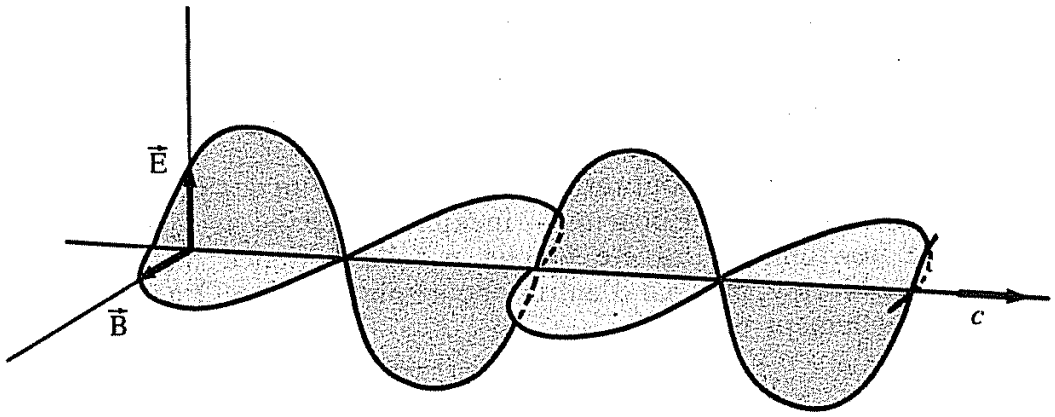


FIG. 9.2

4° Si une onde plane électromagnétique est caractérisée par son champ électrique $\vec{E}$ et que celui-ci, au cours de sa propagation à la vitesse $\vec{c}$, oscille dans un plan déterminé, on dit par définition que cette onde lumineuse est *polarisée linéairement;* le plan $(\vec{E}, \vec{c})$ dans lequel $\vec{E}$ oscille est *le plan de vibration* de l'onde (fig. 9.3). (Certains ouvrages définissent le plan $(\vec{B}, \vec{c})$, orthogonal au précédent, comme son plan de polarisation.)

Une onde lumineuse plane *harmonique,* dont le plan de vibration rectiligne (π) est (Oxy) a, dans le vide, un champ électrique d'équation :

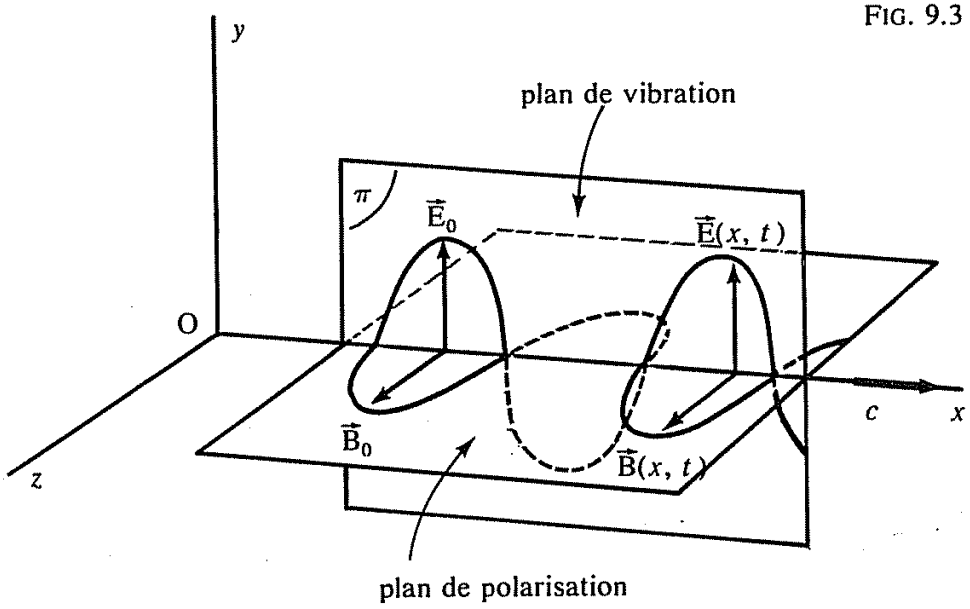
$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin k(x - ct) = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad (\omega = kc), \qquad (9.5)$$

et un champ magnétique :

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t),$$

avec : $\vec{E}_0 \in (\pi)$ et $\vec{B}_0 \perp (\pi)$.

FIG. 9.3



2. PROPAGATION DANS UN MILIEU MATÉRIEL. INDICE DE RÉFRACTION ABSOLU

Une onde électromagnétique, dans un milieu matériel, se propage à la vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{1/\varepsilon\mu},} \tag{9.6}$$

ε et μ étant respectivement la *permittivité diélectrique* et la *perméabilité magnétique de ce milieu* (μ est en général très voisin de μ_0 pour les corps transparents à la lumière, mais ε peut différer de ε_0 d'un facteur important; eau : $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 78$, alcool : $\varepsilon_r = 24$, verre : $\varepsilon_r = 8$, gaz : $\varepsilon_r \sim 1$).

Par définition, l'*indice de réfraction absolu* (n) du milieu est le quotient de la vitesse de l'onde dans le vide à sa vitesse dans le milieu :

$$\boxed{n = c/v.} \tag{9.7}$$

Cet indice dépend, non seulement *du milieu* considéré, mais aussi *de la fréquence ν de l'onde* incidente. Nous avons dessiné cette dépendance sur la figure 9.4 pour quelques matériaux transparents utilisés dans la fabrication des lentilles que l'on trouve dans les instruments d'optique : les verres ont — entre 400 et 800 nm — des indices absolus compris entre 1,5 (crown) et 1,75 (flint lourd), le diamant a un indice très élevé ($n = 2{,}4$ pour $\lambda = 500$ nm) et l'air un indice très voisin de 1, à la pression atmosphérique.

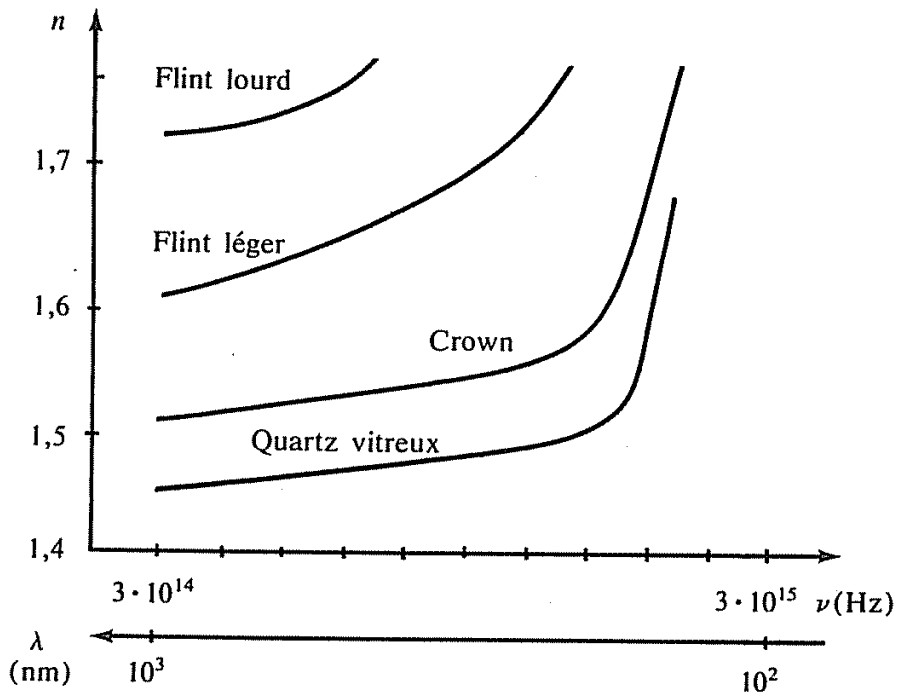


FIG. 9.4

3. NOTION DE CHEMIN OPTIQUE

3.1 Définition

Nous avons défini au paragraphe 6.2 du chapitre 8 la surface d'onde de propagation comme le lieu des points caractérisés, à un instant donné, par la même phase (exemples : à t_0 donné, plans d'équation $x - vt_0 =$ constante, sphères $r - vt_0 =$ constante). Dans deux milieux où les vitesses de propagation d'une même onde lumineuse diffèrent, les surfaces d'onde ne se déplaceront pas non plus à la même vitesse et la notion de *chemin optique* va mettre en relief cette différence.

Considérons, par exemple, une onde plane harmonique qui atteint une lame de verre dont les faces sont parallèles au plan d'onde (fig. 9.5). Soit e son épaisseur et t la durée de sa traversée par l'onde harmonique : v étant la vitesse de phase dans le verre, $t = e/v$. S'il n'y avait pas eu cette lame sur le trajet de l'onde, cette dernière aurait parcouru dans le vide, pendant la même durée, la distance : $\delta = ct = ce/v = ne$.

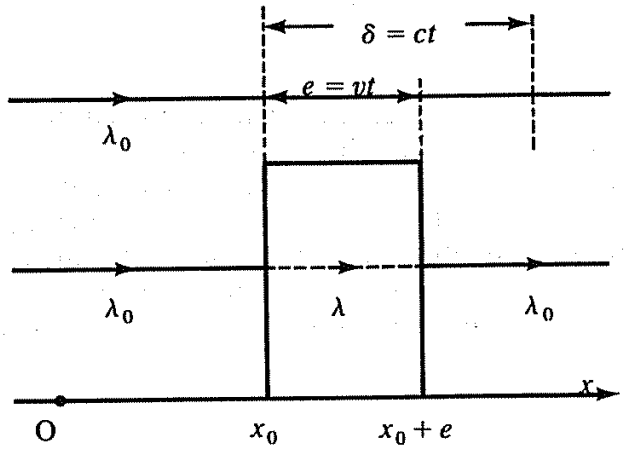


FIG. 9.5

La distance que parcourt une onde de propagation dans le vide pendant l'intervalle de temps qu'elle met à traverser un milieu isotrope, d'épaisseur e et d'indice absolu n, définit le chemin optique de l'onde dont la valeur est : $\delta = ne$.

Soit x_0 l'abscisse de la face d'entrée, $x_0 + e$ celle de la face de sortie de la lame. L'onde harmonique, dans ce milieu, a pour équation, si on ne s'intéresse qu'à son champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right), \quad \text{avec} \quad \lambda = vT.$$

La différence de phase entre l'onde qui sort de la lame en $x_0 + e$ et celle qui pénètre en x_0, mesurée au même instant t_0, est donnée par :

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{x_0 + e}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right) - 2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right) = 2\pi\frac{e}{\lambda}. \qquad (9.8)$$

Dans le vide, à la période T de l'onde correspond la longueur d'onde $\lambda_0 = c\,T \longrightarrow \lambda_0/\lambda = c/v = n$.

> Entre la longueur d'onde d'une onde plane harmonique mesurée dans le vide (λ_0) et dans le milieu (λ) d'indice absolu n existe la relation :
>
> $$\lambda_0 = n\lambda. \qquad (9.9)$$

Il en résulte que : $\varphi = 2\pi e/\lambda = 2\pi(ne/n\lambda)$, soit :

$$\boxed{\varphi = 2\pi\,\delta/\lambda_0.} \qquad (9.10)$$

Ainsi, une lame de verre, d'épaisseur e et d'indice n, produit sur l'onde plane harmonique qui la traverse un déphasage : entre l'onde émergente de la lame et l'onde incidente, ce *déphasage* exprimé par (9.10) est directement *proportionnel au chemin optique de l'onde.*

Si la même onde traverse successivement plusieurs milieux d'indices différents, le chemin optique total est naturellement :

$$\delta = \sum_i n_i e_i, \qquad (9.11)$$

somme de tous les chemins optiques. Le déphasage correspondant entre l'onde émergente du dernier milieu et l'onde incidente est toujours donné par (9.10).

3.2 Application aux lames de phase

Comme exemple d'application, calculons la différence de phase qu'introduit une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice absolu n, sur le trajet d'une onde harmonique plane se déplaçant initialement dans le vide.

Dans le vide, d'indice absolu $n = 1$ ($v = c$), le chemin optique de l'onde qui se déplace de e est $\delta_1 = ne = e$: la différence de phase de l'onde plane ayant parcouru e, par rapport à l'onde plane incidente, vaut $\varphi_1 = 2\pi\dfrac{\delta_1}{\lambda_0} = 2\pi\dfrac{e}{\lambda_0}$; dans la lame, d'épaisseur e et d'indice n, le chemin optique est $\delta_2 = ne$ et le déphasage, par rapport à l'onde plane incidente, vaut $\varphi_2 = 2\pi\dfrac{\delta_2}{\lambda_0} = 2\pi\dfrac{ne}{\lambda_0}$.

Le déphasage introduit par la *lame de phase* est donc égal à :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi e(n-1)/\lambda_0.$$

1° Si la différence de chemin optique $(\delta_2 - \delta_1) = e(n-1)$ vaut $k\lambda_0$ (k entier), on qualifie la lame de verre de *lame d'onde :* pour une lame d'onde, $\Delta\varphi = 2k\pi$, il n'y a pas de déphasage entre l'onde émergente de la lame et celle ayant parcouru la même épaisseur e dans le vide.

2° Si $(\delta_2 - \delta_1) = e(n-1) = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}$ (k entier), on qualifie la lame de verre de *lame demi-onde :* $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, l'onde émergente de la lame est en opposition de phase par rapport à celle qui a parcouru dans le vide la même épaisseur e.

3° Si $(\delta_2 - \delta_1) = e(n-1) = (2k+1)\frac{\lambda_0}{4}$ (k entier), on parle *de lame quart d'onde :* $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ donne la différence de phase correspondante entre l'onde émergente de la lame et celle qui traverse la même épaisseur e de vide; $\Delta\varphi = +\pi/2$ pour $e(n-1) = \lambda_0/4,\ 5\lambda_0/4,\ 9\lambda_0/4$ et $\Delta\varphi = -\pi/2$ pour $e(n-1) = 3\lambda_0/4,\ 7\lambda_0/4,\ \ldots$

4. NOTION DE RAYONS LUMINEUX

Dans un milieu transparent, la lumière se propage de proche en proche, chaque point atteint par le champ électrique $\vec{E}$ devenant, selon Huyghens, une source d'onde secondaire.

Quand le milieu est isotrope, les ondes secondaires sont sphériques; si nous retournons aux figures 8.10a et b qui illustrent respectivement la construction d'Huyghens des surfaces d'ondes plane et sphérique, nous voyons qu'il est possible de dessiner sur ces figures des lignes orthogonales aux surfaces d'ondes successives : ces lignes représentent des *rayons lumineux* selon lesquels l'onde se propage.

> On peut montrer que la relation d'orthogonalité entre rayons lumineux et surfaces d'onde est conservée tout au long du processus de propagation de l'onde dans un milieu isotrope.

A cette occasion, on notera l'analogie géométrique qui existe entre surfaces d'ondes et surfaces équipotentielles ainsi qu'entre rayons lumineux et lignes de champs associées (§ 10 du chap. 6, t. 1).

En optique géométrique (chap. 10), on ne considérera, sauf exception, que des milieux isotropes. De plus, les faisceaux lumineux ne seront limités que par des diaphragmes ou pupilles de large ouverture : les effets de diffraction (chap. 11), dus à la nature ondulatoire de la lumière, n'auront qu'une portée restreinte. On peut alors admettre que, dans une telle situation, les faisceaux lumineux traversant un système optique seront constitués de portions rectilignes de rayons lumineux indépendantes les unes des autres.

Exemple : Considérons une onde plane harmonique qui traverse deux diaphragmes (D_1) et (D_2) avant de pénétrer dans une lentille mince convergente (L) (fig. 9.6); le rôle de cette lentille est de transformer

l'onde plane en une onde sphérique convergeant vers le foyer F de la lentille. Au lieu de dessiner les plans d'ondes successifs (π) et les sphères concentriques (Σ), il revient au même de représenter les rayons lumineux orthogonaux aux surfaces d'ondes précédentes : ils représentent un faisceau de lumière parallèle convergeant, grâce à (L), vers le point F et divergeant ensuite après.

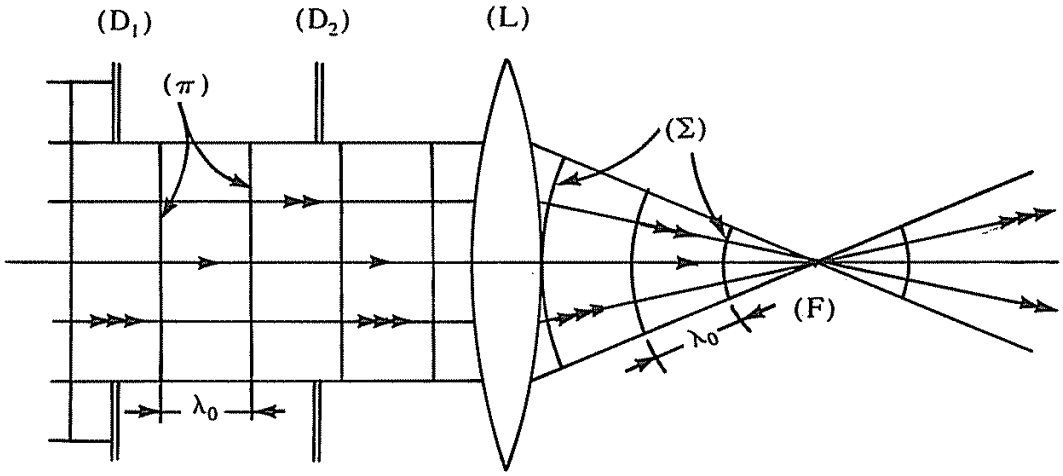


FIG. 9.6

5. DUALITÉ ONDE-CORPUSCULE

La lumière a été décrite ci-dessus en termes d'onde électromagnétique; cet aspect ondulatoire est indispensable pour expliquer certaines expériences, telles qu'interférences et diffraction. Il est, par contre, inadéquat pour en expliquer d'autres, telles que l'effet photo-électrique (ou encore l'effet Compton); dans ces dernières, la lumière, ou plutôt l'énergie qu'elle transporte, apparaît comme quantifiée, c'est-à-dire formée de «grains» de même énergie, très faible, mais non nulle; on appelle ces grains des *photons*.

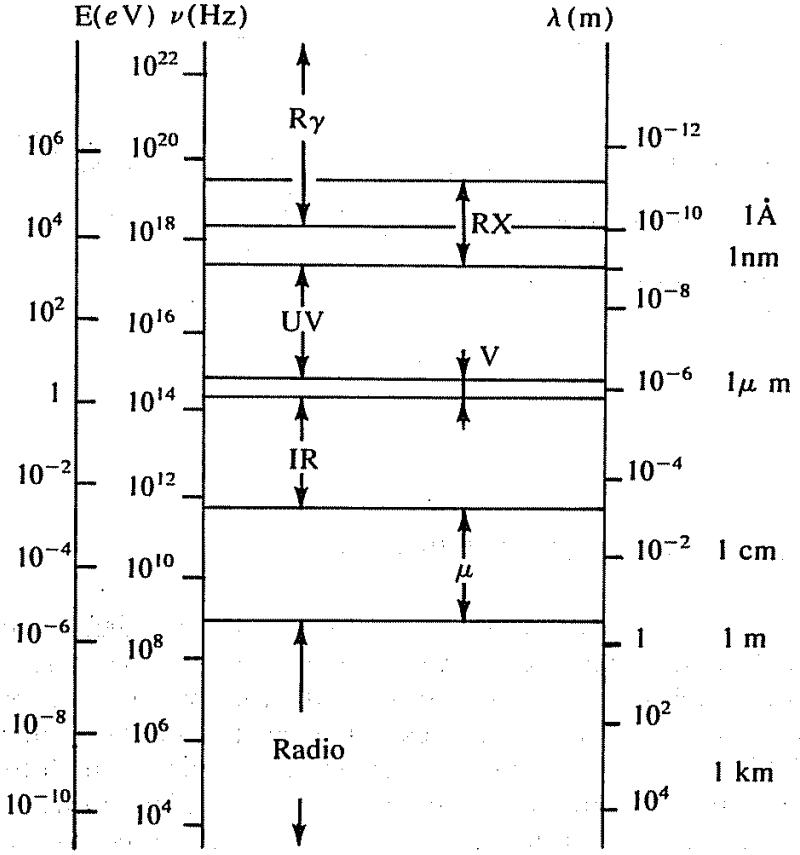
Certaines expériences peuvent être expliquées dans les deux langages : l'énergie transportée par la lumière, les lois de la réflexion et de la réfraction, par exemple. Il y a évidemment un lien entre les propriétés de l'onde et celles du photon :

> à l'onde de fréquence ν, de vecteur d'onde $\vec{k}$, on associe des photons d'énergie $E = h\nu = (h/2\pi) \times (2\pi\nu) = \hbar\omega$, de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$,

(en posant $\hbar = h/2\pi$; h est la constante de Planck, égale à $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J·s).
Ce caractère ambivalent a été étendu à toutes les particules élémentaires qui apparaissent comme des ondes dans certaines expériences.

6. LE SPECTRE DU RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les ondes électromagnétiques couvrent un domaine de fréquences extrêmement étendu (0 à 10^{22} Hz). Pour des raisons essentiellement historiques, le spectre de ce rayonnement est divisé en de nombreux domaines aux frontières mal définies. Le tableau 1 permet de voir qu'il s'étend des rayons γ [dont les longueurs d'onde peuvent être inférieures aux dimensions d'un noyau atomique ($\lambda \leqslant 10^{-14}$ m) et de fréquences très élevées] aux ondes-radio (dont la longueur d'onde peut atteindre 10^3 km).



Rγ : rayons γ, RX : rayons X, UV : ultraviolet
V : lumière visible, IR : infrarouge, μ : micro-onde

TABLEAU 1

L'étendue de ce domaine spectral permet de comprendre pourquoi les différentes parties de ce spectre vont se comporter différemment dans leur propagation à travers la matière; par exemple, les rayons X « mous » ($\lambda \sim 50$ Å, E ~ 250 eV) sont totalement absorbés par une couche très mince de matériau alors que les rayons X « durs » ($\lambda \sim 0{,}2$ Å, E ~ 62 keV) sont très peu absorbés par une épaisseur importante de matière; la différence de transparence des organes du corps humain vis-à-vis de tels rayons est à la base de la radiographie médicale.

Remarque : Dans le domaine visible, la couleur de la lumière prend, du violet au rouge, toutes les couleurs de l'arc-en-ciel : la qualité de la couleur de la lumière (son *chromatisme*) ne dépend donc pas de la

longueur d'onde puisque celle-ci varie d'un milieu transparent à un autre sans que le chromatisme change. La couleur d'un rayonnement visible dépend donc de la fréquence ν de l'onde ou de l'énergie $E = h\nu$ du photon. Dire *qu'un rayonnement est monochromatique* est donc équivalent à préciser que ce *rayonnement a une fréquence donnée.*

LA LUMIÈRE POLARISÉE

7. POLARISATIONS LINÉAIRE, ELLIPTIQUE ET CIRCULAIRE

Considérons deux ondes planes harmoniques, polarisées linéairement (§ 1), de même fréquence ω et se propageant selon Ox ; l'une d'elles vibre selon $\vec{j}$, l'autre selon $\vec{k}$, vecteurs orthonormés du référentiel $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: *leurs états de polarisation transversale sont donc orthogonaux* (fig. 9.7).

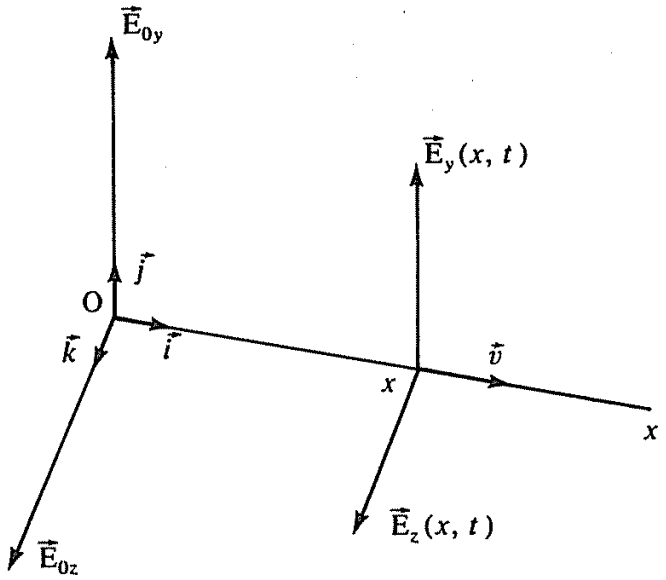


FIG. 9.7

Si δ représente la différence de phase entre la deuxième et la première de ces ondes, nous écrirons :

$$\begin{aligned} \vec{E}_y(x, t) &= \vec{j}\, E_{oy} \sin(kx - \omega t), \\ \vec{E}_z(x, t) &= \vec{k}\, E_{oz} \sin(kx - \omega t + \delta). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Individuellement, ces ondes sont les solutions des équations de Maxwell, leur composition : $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_y(x, t) + \vec{E}_z(x, t)$ l'est aussi et représente une *onde plane, de même vitesse de propagation,* dépendant de δ.

1° $\delta = 0$; on a : $\vec{E}(x, t) = (\vec{j}\, E_{oy} + \vec{k}\, E_{oz}) \sin(kx - \omega t)$, qui représente une *onde harmonique* vibrant selon $(\vec{j}\, E_{oy} + \vec{k}\, E_{oz})$, vecteur constant : l'onde est *polarisée linéairement,* sa vibration s'effectuant selon la diagonale AC du rectangle ABCD (fig. 9.8).

2° $\delta = \pi$; on a $\vec{E}(x, t) = (\vec{j}\,E_{oy} - \vec{k}\,E_{oz})\sin(kx - \omega t)$, équation d'une onde plane harmonique polarisée linéairement selon $(\vec{j}\,E_{oy} - \vec{k}\,E_{oz})$, donc vibrant selon la diagonale BD du rectangle ABCD (fig. 9.8).

3° $\delta \neq 0$ ou π; posons :

$$\begin{aligned} E_y &= E_y(x, t) = E_{oy} \sin(kx - \omega t), \\ E_z &= E_z(x, t) = E_{oz} \sin(kx - \omega t + \delta). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Il vient : $E_y/E_{oy} = \sin(kx - \omega t)$,

$E_z/E_{oz} = \sin(kx - \omega t + \delta) = \sin(kx - \omega t)\cos\delta + \cos(kx - \omega t)\sin\delta$

$\longrightarrow (E_z/E_{oz}) - (E_y/E_{oy})\cos\delta = \cos(kx - \omega t)\sin\delta$

$\longrightarrow (E_z/E_{oz})^2 + (E_y/E_{oy})^2\cos^2\delta - 2(E_y/E_{oy})(E_z/E_{oz})\cos\delta$

$= \cos^2(kx - \omega t)\sin^2\delta.$

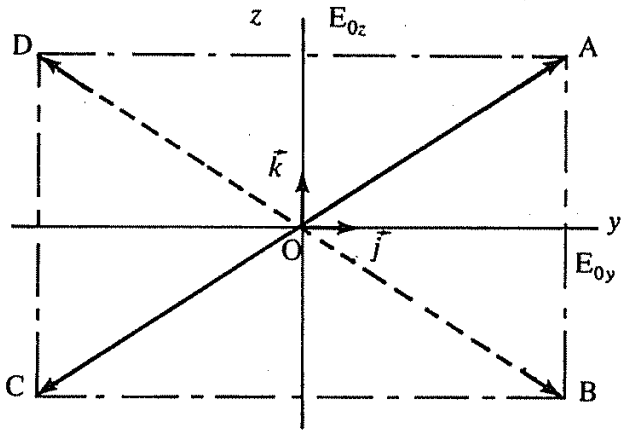


FIG. 9.8

En additionnant cette relation à :

$$(E_y/E_{oy})^2 \sin^2\delta = \sin^2(kx - \omega t)\sin^2\delta,$$

on obtient finalement :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{9.14}$$

équation d'une ellipse inscrite dans le rectangle ABCD et dont le grand axe (Δ) fait l'angle α avec $\vec{j}$ (fig. 9.9), la valeur de α étant donné par :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{oy}E_{oz}}{E_{oy}^2 - E_{oz}^2}\cos\delta. \tag{9.15}$$

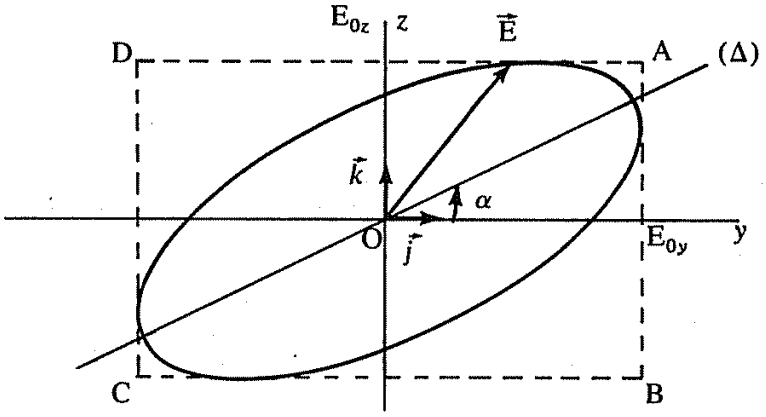


FIG. 9.9

Ainsi au cours de sa propagation le long de l'axe des x, le vecteur $\vec{E}(E_y, E_z)$ décrit une hélice, à la fréquence ω, dont la section droite par le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ est l'ellipse ci-dessus : on dit que *l'onde est polarisé elliptiquement.*

Dans la figure 9.10, nous avons dessiné les projections sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ des trajectoires décrites par $\vec{E}(x, t)$ durant sa propagation *pour différentes valeurs de* δ; la flèche donne le sens du déplacement pour t croissant.

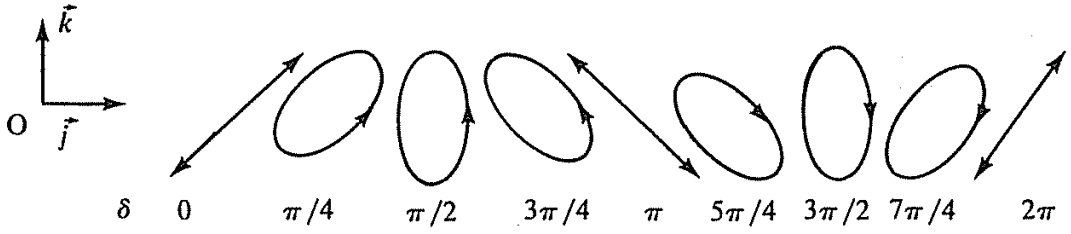


FIG. 9.10

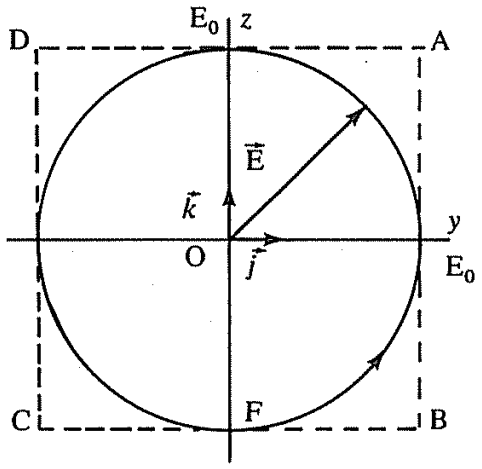
4° $\delta = \pm \pi/2$, $E_{oy} = E_{oz} = E_o$; dans ces conditions, (9.13) devient :

$$\begin{aligned} E_y &= E_o \sin(kx - \omega t), \\ E_z &= \pm E_o \cos(kx - \omega t), \end{aligned} \tag{9.16}$$

le rectangle ABCD se transformant en carré. Le vecteur $\vec{E}$, au cours de sa propagation selon $\vec{i}$, décrit une hélice à la fréquence ω, dont la section droite par le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ est le cercle d'équation :

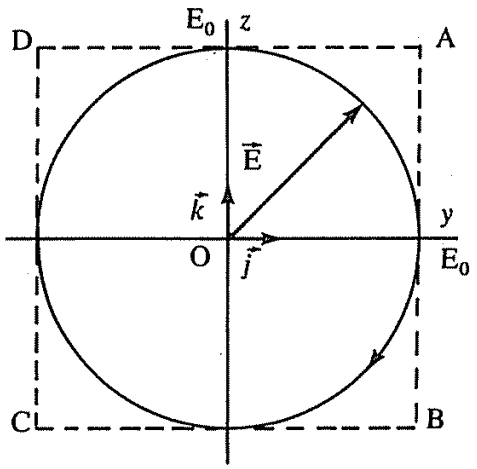
$$E_y^2 + E_z^2 = E_o^2. \tag{9.17}$$

On parle alors d'une *onde polarisée circulairement à droite* (fig. 9.11 a) pour $\delta = \pi/2$, *à gauche* (fig. 9.11 b) pour $\delta = -\pi/2$.



$\delta = \pi/2$, polarisation dextrogyre

(*a*)



$\delta = -\pi/2$, polarisation lévogyre

(*b*)

FIG. 9.11

Nota : Pour déterminer le sens de rotation, il suffit de calculer la vitesse de déplacement de $\vec{E}$ pour un point particulier : par exemple, si $\delta = +\pi/2$, au point F$(0, -E_o)$, la phase

$$kx - \omega t = \pi \longrightarrow (\dot{E}_y)_F = -\omega E_o \left[\cos(kx - \omega t)\right]_F$$
$$= -\omega E_o(-1) = \omega E_o > 0,$$

donc déplacement dans le sens $\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire polarisation dextrogyre.

8. LUMIÈRE NATURELLE ET LUMÈRE PARTIELLEMENT POLARISÉE

La lumière naturelle (émise par les sources telles que le Soleil, les lampes à incandescence ou à arcs, ou encore les tubes à décharge) n'est pas polarisée : les ondes sont émises par les atomes de la source de manière incohérente, chacune pour son propre compte, si on peut dire; pour un pinceau lumineux émis par une faible surface de la source, le plan de vibration ne garde la même orientation que pendant un temps très faible, au bout duquel elle change, etc., sans qu'il y ait la moindre corrélation entre les positions successives du plan de vibration (fig. 9.12).

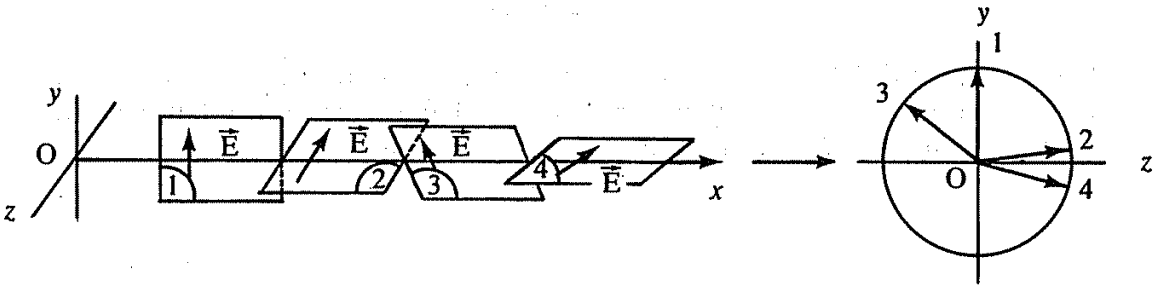


FIG. 9.12

Il n'est pas tout à fait exact de dire que la lumière est incohérente ou non polarisée : elle l'est effectivement, mais pendant un temps très court, au maximum de l'ordre de 10^{-9} s.

Tout récemment, on a découvert des sources, les lasers, qui peuvent produire de la lumière visible polarisée. Il n'y a, par contre, aucune difficulté à produire des ondes radio-électriques polarisées.

Néanmoins, on a obtenu de la lumière polarisée bien avant l'invention du laser, par interaction de la lumière avec la matière. A titre d'exemple, considérons de la lumière naturelle tombant sur une lame de verre (fig. 9.13) : le faisceau incident IO n'est pas polarisé. Quant au faisceau réfléchi OR, l'expérience montre que les composantes $\vec{E}_{//}$ des vecteurs $\vec{E}$ (parallèles à la lame) sont réfléchies alors que les composantes $\vec{E}_{\perp}$ de $\vec{E}$ [contenues dans le plan (π) d'incidence] sont très atténuées : après réflexion, la lumière émergente est donc partiellement polarisée. Il y a même une valeur de l'angle d'incidence $\alpha = (ON, OI)$ pour laquelle $E_{\perp} = 0$: la lumière réfléchie dans ces conditions, est linéairement polarisée, pour :

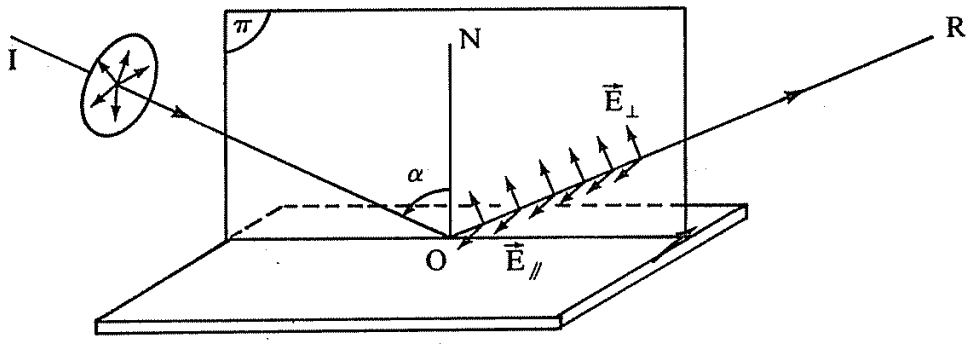


FIG. 9.13

$$\boxed{\text{tg } \alpha = n_2/n_1,} \qquad (9.18)$$

avec n_1 indice de réfraction absolue de l'air, n_2 indice de réfraction absolu du verre. Ce résultat est connu sous le nom de *loi de Brewster.*

9. DICHROÏSME

Le dichroïsme est l'absorption sélective de l'une des composantes linéairement polarisées du champ électrique $\vec{E}(x, t)$: admettons, par exemple, que la direction $\vec{i}$ d'un matériau laisse passer la lumière linéairement polarisée selon $\vec{i}$ et absorbe la lumière linéairement polarisée selon $\vec{j} \perp \vec{i}$ (fig. 9.14). Si un faisceau I_0 de la lumière linéairement polarisée selon $\vec{E}$ tombe sur cette lame et la traverse, seule la composante $\vec{E}_{//}$ (selon $\vec{i}$) sera transmise alors que l'autre $\vec{E}_\perp$ (selon $\vec{j}$) sera absorbée : la lumière émergente OT sera donc elle aussi linéairement polarisée mais selon la direction $\vec{i}$, *l'axe de transmission* de la lame dichroïque. Remplaçons la lumière incidente polarisée par de la lumière naturelle : chaque vecteur $\vec{E}$ se décompose en $\vec{E}_{//}$ et $\vec{E}_\perp$ et la lumière émergente est linéairement polarisée selon $\vec{i}$.

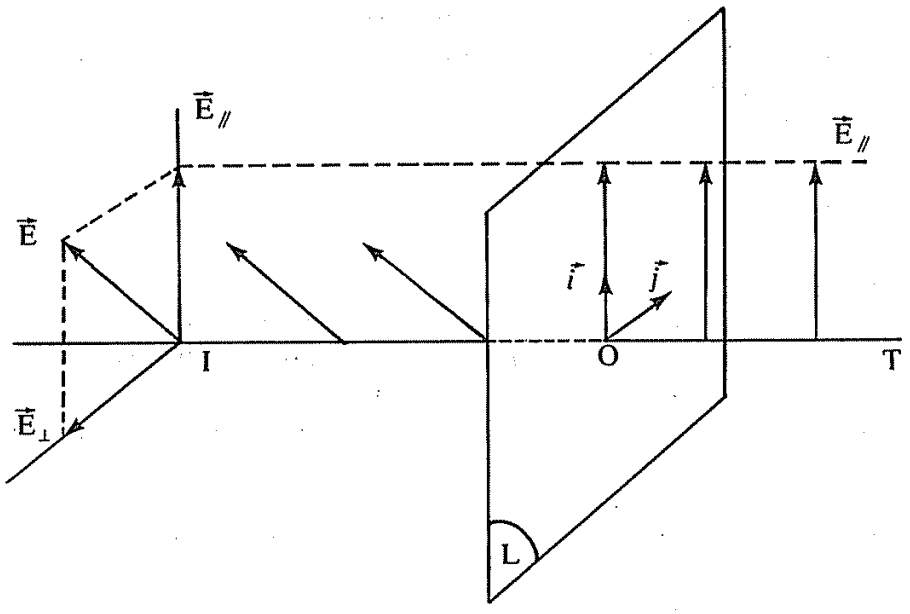


FIG. 9.14

La *tourmaline* est un exemple de cristal dichroïque; actuellement, on lui préfère des feuilles de *polaroïd,* matériau constitué de longues molécules orientées parallèlement : si une telle feuille est assez épaisse, elle ne transmet que le champ électrique parallèle à son axe de transmission, l'autre composante étant peu à peu absorbée.

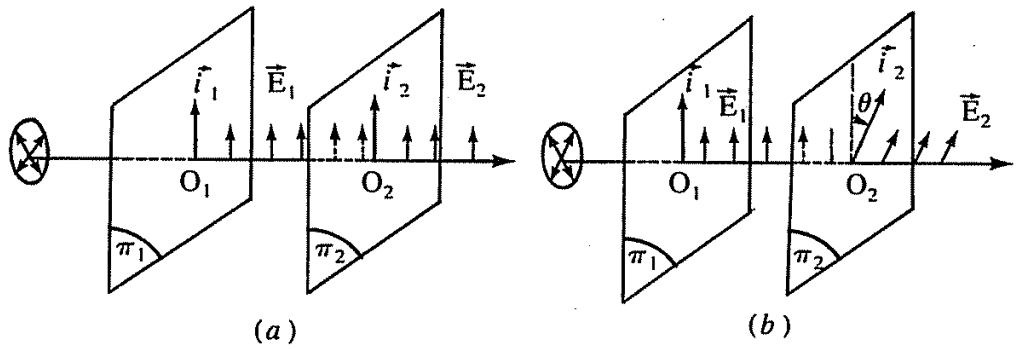


FIG. 9.15

Considérons maintenant deux polaroïds parallèles (π_1) et (π_2) dont les axes de transmission $\vec{i}_1$ et $\vec{i}_2$ coïncident (fig. 9.15 a) : (π_1) polarise linéairement selon $\vec{i}_1$ la lumière naturelle; soit $\vec{E}_1$ le vecteur champ électrique émergent de (π_1) : puisque $\vec{E}_1 \,//\, \vec{i}_1 \,//\, \vec{i}_2$, $\vec{E}_1$ traverse (π_2) et le champ électrique émergent de (π_2) vaut $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$. Si on tourne (π_2) d'un angle θ (fig. 9.15 b) autour de la direction d'incidence, $\theta = (\vec{i}_1, \vec{i}_2)$, après traversée de (π_2), le vecteur $\vec{E}_1$ se trouve réduit à sa composante selon $\vec{i}_2$, soit $\vec{E}_2 = E_1 \cos\theta \vec{i}_2$. On a donc la relation : $E_2 = E_1 \cos\theta$ entre les normes des champs électriques incident et émergent de (π_2); comme l'intensité lumineuse correspondante I est proportionnelle à l'amplitude du champ électrique E, il en résulte la *loi de Malus :*

$$\boxed{I = I_0 \cos^2\theta,} \qquad (9.19)$$

avec I_0 : intensité du faisceau incident polarisé selon $\vec{i}_1$,
I : intensité du faisceau transmis polarisé selon $\vec{i}_2$,
θ : $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$, angle entre les axes de transmission du *polariseur* (π_1) et de l'*analyseur* (π_2).

10. BIRÉFRINGENCE

La plupart des substances sont optiquement *isotropes,* la vitesse de la lumière étant la même dans toutes les directions de l'espace; c'est le cas des liquides, des solides très désordonnés (comme les verres) et des solides à haut degré de symétrie (comme le diamant ou le chlorure de sodium). La réflexion et la réfraction à la surface de ces cristaux sont sans surprise, si on peut dire : un rayon incident dans l'air donne naissance à un rayon réfracté, dans le milieu matériel et à un rayon réfléchi, selon les lois de Descartes; on a signalé ci-dessus (§ 8) que ces deux rayons étaient partiellement polarisés.

D'autres cristaux transparents sont *anisotropes* : citons, entre autres, la calcite (CO_3Ca) ou spath d'Islande, cristal naturel.

Ces cristaux ont des propriétés optiques très remarquables, mais qu'il serait trop long de décrire complètement; on citera seulement la *biréfringence.* Ayant réalisé une lame à faces parallèles judicieusement orientées par rapport aux surfaces cristallines, on envoie sur la face d'entrée un faisceau de lumière polarisée; suivant l'orientation du plan de vibration, le faisceau est dévié ou non (fig. 9.16).

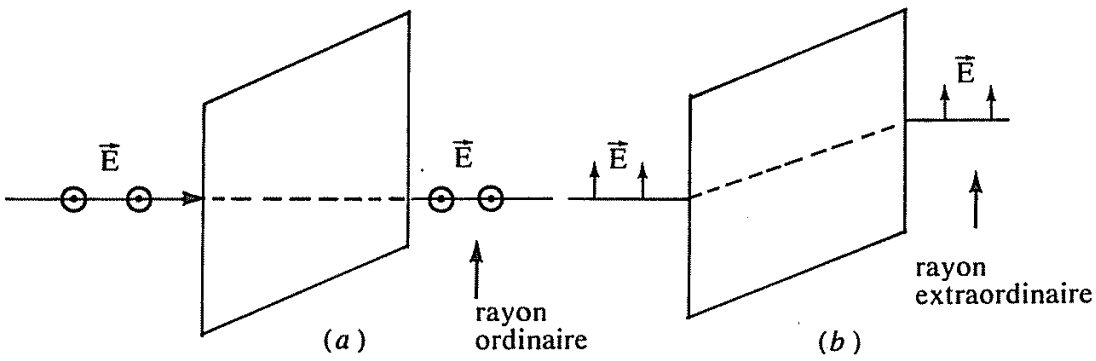


FIG. 9.16

Le *rayon extraordinaire,* qui n'obéit pas aux lois de Descartes, mérite bien ce nom.

Un faisceau de lumière naturelle, qui peut être considéré comme constitué de deux faisceaux polarisés, donne naissance, après réfraction, à deux rayons complètement polarisés et géométriquement séparés. Cette propriété est utilisée pour obtenir un faisceau de lumière polarisée, dans le prisme de Nicol (ou nicol) (fig. 9.17) : la taille, à une valeur convenable, de l'angle ADC et l'introduction de baume du Canada entre les deux demi-prismes ACD et ACB permet d'éliminer le rayon ordinaire par réflexion totale sur AC.

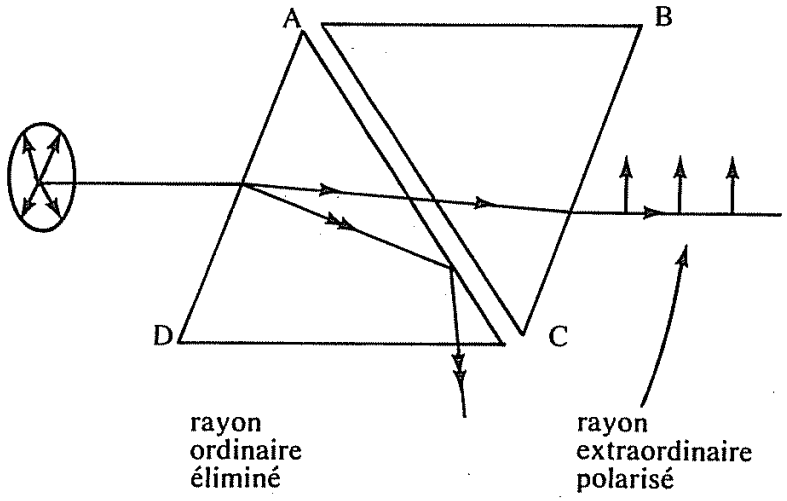


FIG. 9.17

10

ÉLÉMENTS D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE SYSTÈMES OPTIQUES

ÉLÉMENTS D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Sauf spécification contraire, nous conviendrons dans ce chapitre que les *milieux* où la lumière se propage sont *homogènes* et *isotropes*.

1. RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES PLANES

1.1 Les lois de Descartes

Soit une onde plane *monochromatique* se propageant dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}_1$. L'expérience montre que, quand l'onde atteint le plan (AB) qui sépare le milieu (1), d'indice de réfraction absolu n_1, du milieu (2), d'indice n_2, une onde est généralement *transmise* dans (2) en

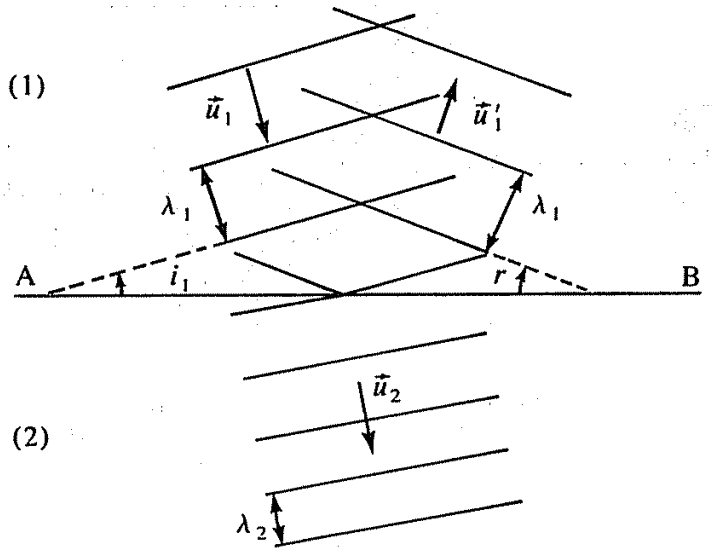


FIG. 10.1

même temps qu'une autre onde est *réfléchie* dans (1) : on parle respectivement d'*ondes réfractée et réfléchie.*

Si l'angle d'incidence i_1 de l'onde incidente n'est pas nul ($\vec{u}_1$ non perpendiculaire à AB ou tout plan d'onde intersectant AB), l'onde plane réfractée se propage selon $\vec{u}_2 \neq \vec{u}_1$ et l'onde plane réfléchie selon $\vec{u}'_1$, symétrique de $\vec{u}_1$ par rapport à AB (fig. 10.1).

Nous avons souligné au paragraphe 4 du chapitre 9 qu'il était équivalent de parler de plans d'onde ou de rayons lumineux orthogonaux à ces mêmes plans; la figure 10.2 établit cette équivalence : OI est le *rayon incident,* parallèle à $\vec{u}_1$ et faisant l'angle i_1 avec la normale N'N à la surface (AB); OT est le *rayon réfracté,* parallèle à $\vec{u}_2$ et faisant l'angle i_2 avec la normale ON, OR est le *rayon réfléchi,* parallèle à $\vec{u}'_1$ et faisant l'angle r avec ON. *Tous les angles (inférieurs à $\pi/2$) sont mesurés à partir de la normale* N'N.

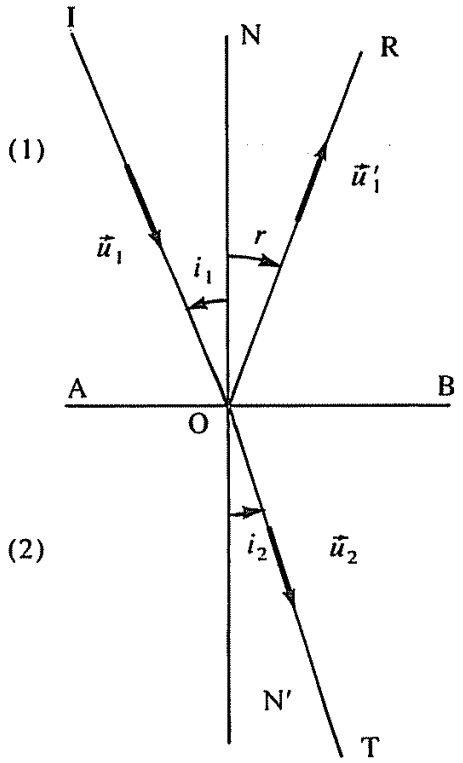


FIG. 10.2

Les directions de ces trois rayons obéissent aux *lois* expérimentales *de Descartes :*

1° Les rayons incident OI, réfracté OT et réfléchi OR sont contenus dans un même plan normal au plan (AB) séparant les deux milieux. Ce plan contient aussi la normale ON à cette surface de séparation.

2° Les angles d'incidence et de réflexion ont des valeurs algébriques opposées :

$$i_1 = -r. \qquad (10.1)$$

3° Le produit de l'indice de réfraction absolu d'un milieu par le sinus de l'angle que fait le rayon lumineux dans ce milieu avec la normale à la surface de séparation est un invariant :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \qquad (10.2)$$

En termes de rayons lumineux, les relations de Descartes sont toujours vraies, lorsque ni la surface d'onde incidente, ni la surface de séparation ne sont planes; en chaque point O de cette surface on peut considérer une section limitée confondue avec son plan tangent et de même pour les surfaces d'ondes : les lois ci-dessus s'y appliquent encore. En toute rigueur, ces lois sont donc des *relations locales.*

Montrons maintenant comment le principe d'Huyghens (§ 7 du chap. 8) permet de les démontrer. Soit une onde plane monochromatique, dont les plans d'onde en phase (à 2π près) sont séparés de λ_1, longueur d'onde de la lumière dans (1) (fig. 10.3 a). A l'instant t_0, un de ces plans d'onde coupe AB en A. A l'instant $t_0 + \mathrm{T}(\lambda_1 = v_1\mathrm{T},\ v_1 = c/n_1)$, ce plan d'onde, ayant progressé de λ_1 dans la direction incidente IA, coupe la surface en B. Durant cette même période T, l'onde secondaire sphérique issue de A, a, selon Huyghens, parcouru le même chemin $\lambda_1 = v_1\mathrm{T}$. Il est facile de vérifier que pour tout point $\mathrm{C} \in \mathrm{AB}$ et atteint par le plan d'onde à l'instant $t_0 + k\mathrm{T}(0 \leqslant k \leqslant 1)$, l'onde secondaire sphérique a, à l'instant $t_0 + \mathrm{T}$, le rayon $v_1 k\mathrm{T}$: la surface d'onde réfléchie est donc le plan BH issu de B et tangent à toutes ces sphères. L'onde réfléchie est plane, de même longueur d'onde λ_1 et sa direction AH, perpendiculaire à BH, fait avec la normale AN l'angle $r = -i_1$.

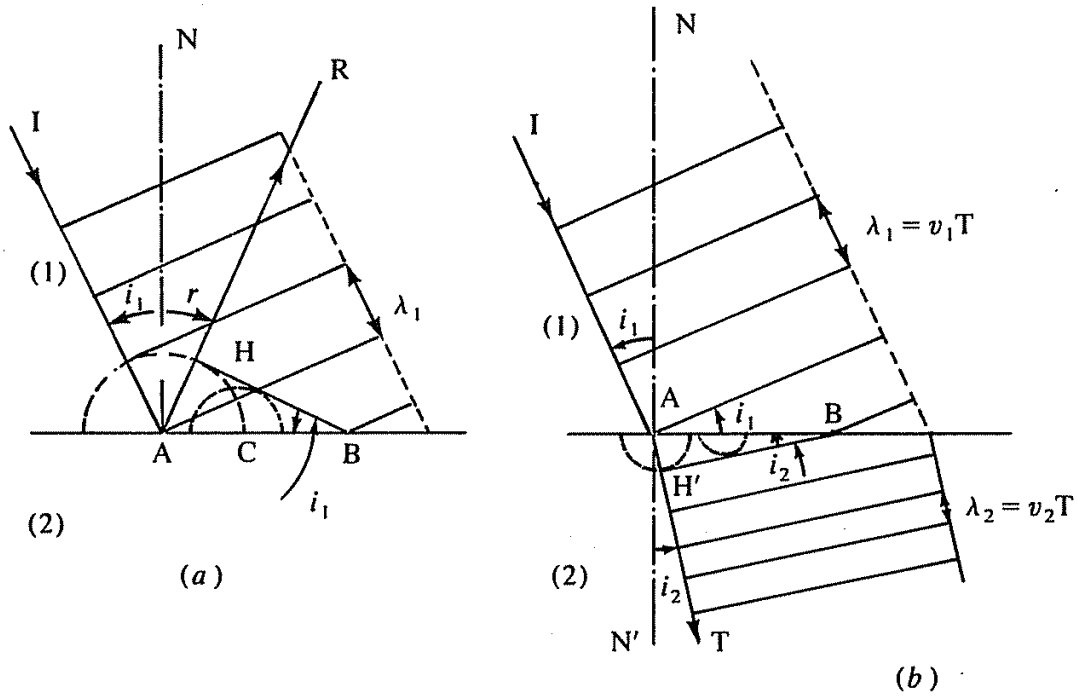


FIG. 10.3

Supposons maintenant qu'après avoir atteint la surface de séparation (1-2), la lumière se propage dans (2) avec la vitesse $v_2(c/n_2)$ et la longueur d'onde $\lambda_2 = v_2\mathrm{T}$. Sur la figure 10.3 b, nous avons encore représenté les plans d'onde incidente distants de λ_1. L'un d'eux atteint l'interface au point A, à l'instant t_0, sous l'angle d'incidence i_1. Une période T plus tard, le même front d'onde ayant parcouru λ_1 arrive en B sur l'interface. Pendant cette période, l'onde secondaire, issue de A, est devenue une sphère de rayon $\lambda_2 = v_2\mathrm{T}$. Tout point $\mathrm{C} \in \mathrm{AB}$ atteint par le plan d'onde à

l'instant $t_0 + kT (0 \leqslant k \leqslant 1)$ donne également naissance à une onde secondaire sphérique de rayon $v_2 kT$, à l'instant $t_0 + T$; la surface d'onde réfractée sera donc le plan tangent BH' à toutes ces sphères : l'onde réfractée est plane, de longueur d'onde λ_2, sa direction AH', perpendiculaire à BH', fait avec la normale N'A l'angle i_2 tel que :

$$\sin i_2 = \frac{AH'}{AB} = \frac{\lambda_2}{AB}; \quad \text{avec} \quad \sin i_1 = \frac{AH}{AB} = \frac{\lambda_1}{AB},$$

soit :

$$\boxed{\frac{\sin i_2}{\lambda_2} = \frac{\sin i_1}{\lambda_1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,} \tag{10.3}$$

puisque : $\lambda_i = v_i T$ et $v_i = c/n_i$, $(i = 1, 2)$.

Remarque. On introduit parfois l'indice relatif $n_{21} = n_2/n_1$; (10.3) devient ainsi $\sin i_1 = n_{21} \sin i_2$. Nous éviterons l'utilisation de cet indice qui détruit la symétrie des résultats et peut être source de confusion.

Les *invariants de réfraction* (10.3) restent vrais en permutant le rôle des deux milieux : une onde plane cheminant dans (2) et rencontrant l'interface (2-1) sous l'angle d'incidence i_2 se réfracte dans le milieu (1) en donnant une onde plane qui se propage selon l'angle i_1. Ce résultat traduit le *principe du retour inverse de la lumière :*

> le trajet suivi par la lumière est indépendant de son sens de propagation.

1.2 Discussion des lois de Descartes : la réflexion totale

1° Si $v_2 < v_1$, il en résulte $n_2 > n_1$, soit $n_1/n_2 < 1$: i_1 prenant ses valeurs sur $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin i_1 \leqslant 1$ entraîne $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leqslant \sin i_1$. *Si* $n_2 > n_1$, *l'angle de réfraction* i_2 *est toujours inférieur à l'angle d'incidence* i_1 (fig. 10.4 a) : c'est ce qui s'observe quand le rayon lumineux se propage d'un milieu peu dense vers un milieu plus dense.

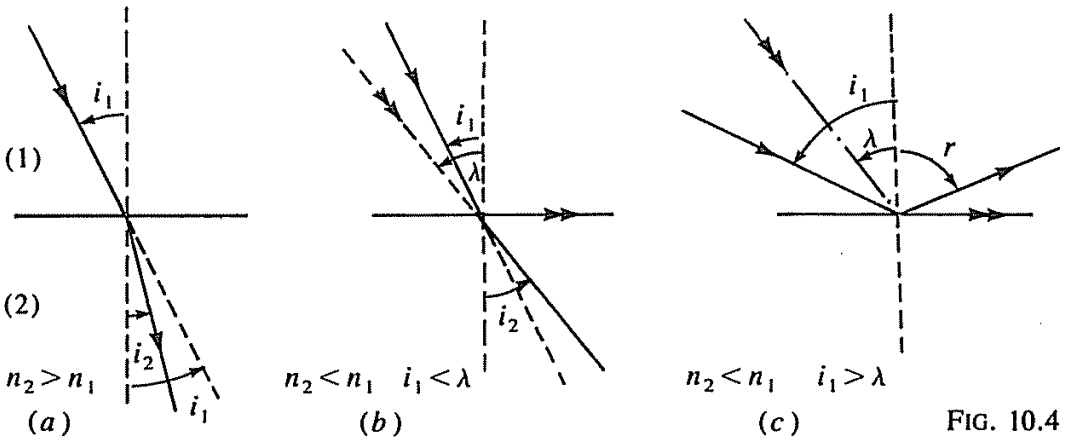


FIG. 10.4

2° Si $v_2 > v_1$, $n_2 < n_1$ soit $n_1/n_2 > 1$: $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > \sin i_1$; mais $\sin i_2$ ne pouvant être supérieur à 1, cette condition ne peut être réalisée que si $1 \geqslant \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \geqslant 0$, c'est-à-dire i_1 prenant ses valeurs sur $[0, \lambda]$ en appelant λ l'*angle critique* défini par :

$$\boxed{\sin \lambda = n_2/n_1.} \qquad (10.4)$$

a) *Pour* $i_1 \in [0, \lambda[$ *et* $n_2 < n_1$, *l'angle de réfraction* i_2 *est toujours supérieur à l'angle d'incidence* i_1 *et au plus égal à* $\pi/2$ (fig. 10.4b).

b) Pour $i_1 \in [\lambda, \frac{\pi}{2}]$ et $n_2 < n_1$, il n'y a plus de réfraction : on dit qu'il y a *réflexion totale* (fig. 10.4c). Cette situation peut s'observer lorsque la lumière passe d'un milieu dense à un milieu moins dense (exemples : fontaine lumineuse où la lumière semble enfermée dans l'eau qui sort de la fontaine, lampe d'intérieur à effet décoratif comportant des fibres de quartz (guides de lumière) éclairées à l'une de leurs extrémités, endoscope pour exploration des organes internes du corps humain, mirages dus à une variation de l'indice de l'air au voisinage du sol surchauffé, etc.).

2. DÉFINITIONS PROPRES A L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

2.1 Système optique

C'est un ensemble de milieux homogènes et transparents disposés à la suite les uns des autres et séparés par des surfaces de forme géométrique généralement simple (plan, sphère, ellipsoïde) et aisées à réaliser mécaniquement.

Comme nous l'avons déjà précisé, nous supposerons de plus que ces milieux sont isotropes. Si les surfaces de séparation — dites surfaces dioptriques ou *dioptres* — successives sont de révolution autour d'un même axe, le *système* est dit *centré* et cet axe est *l'axe du système centré.*

On peut orienter cet axe en choisissant arbitrairement un sens : dans tout ce chapitre, *nous supposerons que la lumière se propage de gauche à droite ce qui nous conduira à numéroter les différents milieux successifs qu'elle traverse 1, 2, 3,* etc., d'indices de réfraction absolus respectifs $n_1, n_2, n_3, \ldots$ En choisissant un point origine O sur l'axe, *toute abscisse mesurée sur l'axe à gauche de* O *sera négative, et à droite, positive.*

2.2 Image d'un point lumineux

Soit un système optique figuré par ses deux faces extrêmes (S_1) et (S_2) (fig. 10.5) : celle (S_1), qui est du côté du point lumineux A et reçoit, par suite, les rayons issus de cette source, est la *face d'entrée;* l'autre (S_2) est *la face de sortie.* Le point A émet des ondes sphériques : il envoie donc vers (S_1) un faisceau de rayons lumineux conique divergent; une partie de ce faisceau pénètre dans le système optique, chemine à travers lui et en sort par (S_2), constituant le faisceau émergent : *si le faisceau émergent est conique de sommet* A', on dit que A' *est l'image du point* A à travers le système optique.

1° Si le *faisceau* conique est *convergent* au niveau de (S_2), les rayons qui le constituent passent réellement par A′ : *l'image* A′ *de* A *est réelle* (fig. 10.5 a).

2° Si le faisceau conique est divergent, A′ est alors situé sur le prolongement des rayons émergents, c'est-à-dire sur ce que l'on appelle la partie virtuelle de ces rayons; un observateur placé à droite ayant l'impression que le faisceau émergent est émis par A′, A′ *sera une image virtuelle. Les rayons virtuels,* prolongement par la pensée de rayons réels effectivement suivis par la lumière, *seront toujours représentés en lignes pointillées, les rayons réels étant dessinés en trait plein* (fig. 10.5 b).

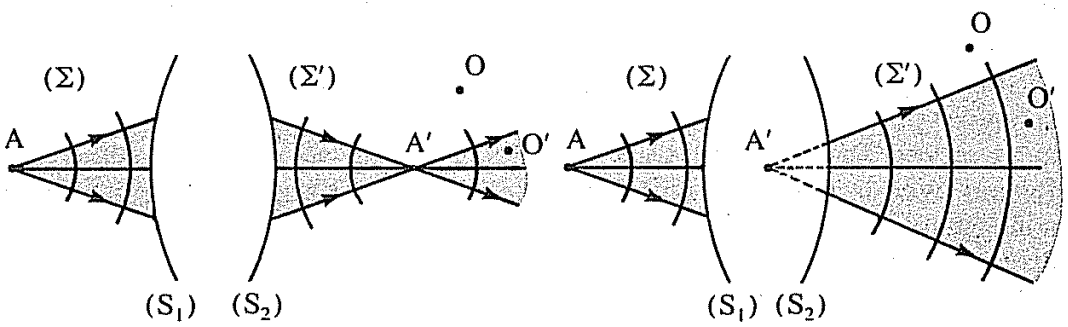


FIG. 10.5

Rien ne distingue pour un observateur une image réelle d'une image virtuelle. Soit cet observateur dont l'œil regarde en direction de A (fig. 10.5) : si l'œil est en O, à l'extérieur du faisceau émergent, l'observateur ne recevant aucun rayon lumineux ne verra pas A′; si l'œil est en O′, à l'intérieur du faisceau émergent, l'observateur en s'éloignant suffisamment de (S_2) recevra les rayons lumineux provenant soit réellement de A′ (cas *a*), soit semblant provenir de A′ (cas *b*) : dans les deux cas, il aura l'impression qu'il y a en A′ un véritable point lumineux.

Considérons maintenant cet observateur cherchant à recueillir sur un écran diffusant (E) (verre dépoli, feuille de papier blanc) l'image A′ de A; si celle-ci est réelle (cas *a*), en déplaçant (E), il obtiendra pour une position de ce dernier un *point lumineux* quand (E) sera en A′; par contre, si l'image est virtuelle, il n'observera sur (E) qu'une *tache lumineuse* qui ira en s'élargissant au fur et à mesure que l'écran est éloigné. Une image réelle peut donc être reçue sur un écran alors que cela est impossible pour une image virtuelle.

2.3 Point lumineux virtuel

La figure 10.6, permet de comprendre aisément ce que l'on entend par là :

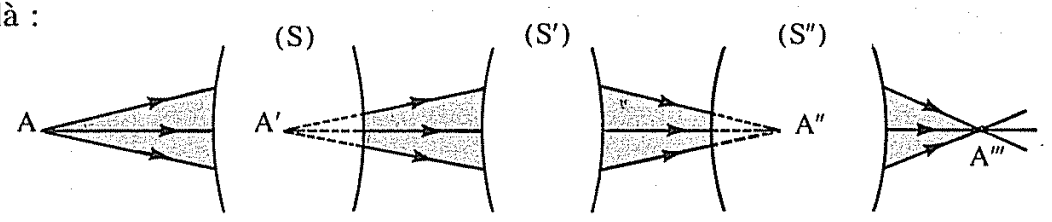


FIG. 10.6

— A est un point objet réel pour (S) car il émet un faisceau lumineux divergent,

— A′ est l'*image virtuelle* que (S) donne de A : A′ se comporte pour (S′) comme un point objet réel,

— (S′) donne de A′ une image réelle A″ : celle-ci joue pour (S″) le rôle d'*objet virtuel* dont l'image réelle est A‴.

3. MIROIR PLAN

Toute surface plane réfléchissante est un *miroir plan* (surface libre d'un liquide, surface dressée d'un bloc de verre ou de métal poli, glace de café, etc.).

Soit un point objet B : le rayon BH, normal au miroir, doit se réfléchir selon sa propre direction d'après les lois de Descartes (fig. 10.7a). Un autre rayon BO tombant sous l'incidence i doit se réfléchir selon B′O faisant avec la normale en O, l'angle $r = -i$. Les triangles BHO et B′HO sont égaux : B′ *est donc symétrique de* B *par rapport au miroir* (M); il est aisé de vérifier que tout autre rayon incident BH′ se réfléchit sur (M) selon B′H′.

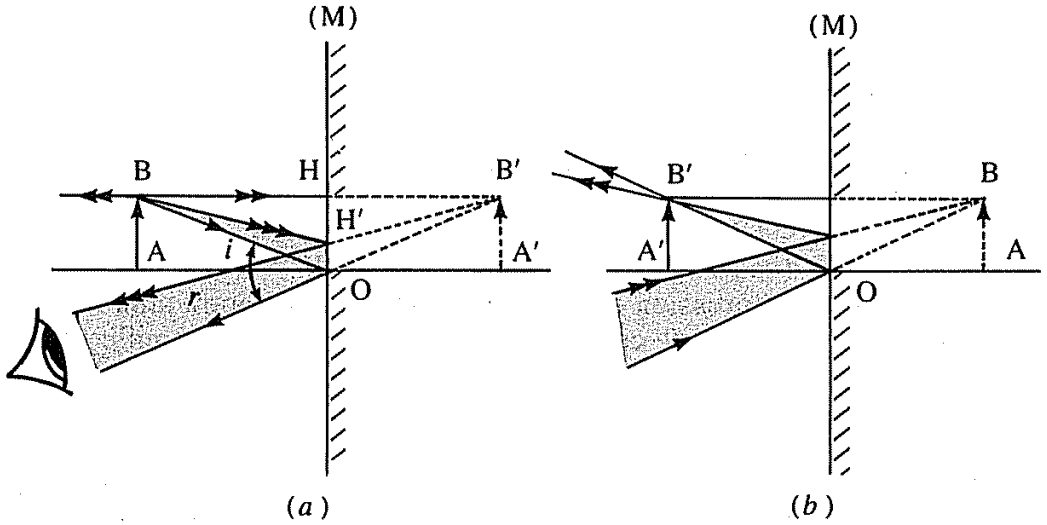


FIG. 10.7

Quel que soit le faisceau lumineux issu de B et tombant sur (M), il se réfléchit en semblant venir de l'image B′ de B. Si nous considérons *un objet* AB *réel, son image* A′B′ *par* (M) est donc *virtuelle, de même grandeur et de même sens;* un observateur regardant le miroir voit l'image A′B′ de l'objet AB derrière le miroir : pour l'œil de l'observateur, A′B′ se comporte comme un objet réel.

Inversement, soit un faisceau lumineux convergeant vers une image réelle : coupons-le par un miroir (M) (fig. 10.7b) : l'image réelle devient un objet virtuel que le miroir transforme en une image réelle que l'on peut recueillir sur un écran.

Par définition, le *champ* d'un miroir plan limité (MM′), pour une position donnée Ω de l'œil, est la région de l'espace dans laquelle se trouve un point lumineux A pour qu'il soit vu de Ω par réflexion dans le miroir

(fig. 10.8). Le point A sera dans le champ si le prolongement du rayon AO, issu de A, passe par le point Ω', symétrique de Ω par rapport au miroir. Ce champ dépend des dimensions du miroir et de la position de l'œil vis-à-vis de lui : il est limité par la nappe conique issue de Ω' et s'appuyant sur le contour du miroir.

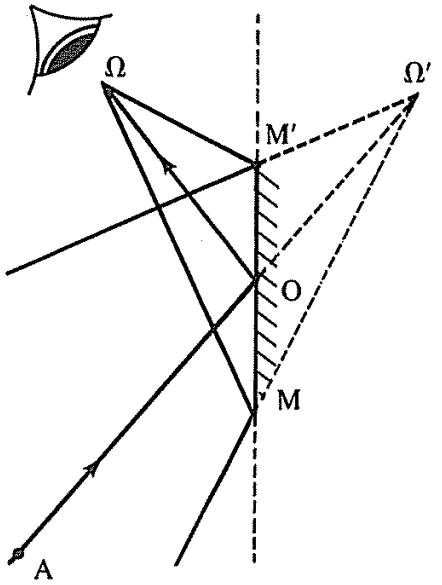


FIG. 10.8

4. MIROIRS SPHÉRIQUES

Les *miroirs sphériques* sont des miroirs dont la surface réfléchissante est une *portion de sphère* (C, R) dont le centre C est qualifié de *centre de courbure* du miroir. L'axe de symétrie, *axe principal,* du miroir le traverse en son *sommet* S, pôle de la calotte sphérique et *origine de l'axe.*

Si la surface réfléchissante du miroir est du même côté que C, le *miroir* sera dit *concave* et pour que la lumière se réfléchisse sur lui selon la convention adoptée (§ 2.1), son rayon $\overline{SC}$ doit être négatif. $(\overline{SC} = R < 0)$. Lorsque la surface réfléchissante n'est pas du même côté que C, le miroir est dit *convexe* et son rayon $\overline{SC}$ est positif $(\overline{SC} = R > 0)$.

Considérons le cas d'un miroir concave (fig. 10.9). Supposons que le point objet A soit une source d'ondes sphériques; le rayon AO se réfléchit selon OA' avec $r = -i$; or, l'examen du triangle AOC montre que : $\beta = \alpha_1 - i$ et celui de COA', que : $\alpha_2 = \beta + r$, le signe des angles, d'après l'orientation du plan $(\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{SO})$, étant donné par le sens conventionnel de la trigonométrie :

$$r = -i,\ \alpha_1 = \beta + i,\ \alpha_2 = \beta + r \longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta. \qquad (10.5)$$

La relation (10.5) est toujours vraie, mais d'usage peu commode. Supposons alors que les angles α_1, α_2 et β soient très petits : nous dirons que cela constitue l'*approximation des rayons para-axiaux.* Dans ces conditions, les tangentes des angles se confondent avec leurs mesures en radian :

$$\alpha_1 \# \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\overline{HO}}{\overline{AH}} \# \frac{\overline{HO}}{\overline{AS}}, \quad \alpha_2 \# \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\overline{HO}}{\overline{A'H}} \# \frac{\overline{HO}}{\overline{A'S}},$$

$$\beta \# \operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{HO}}{\overline{CH}} \# \frac{\overline{HO}}{\overline{CS}},$$

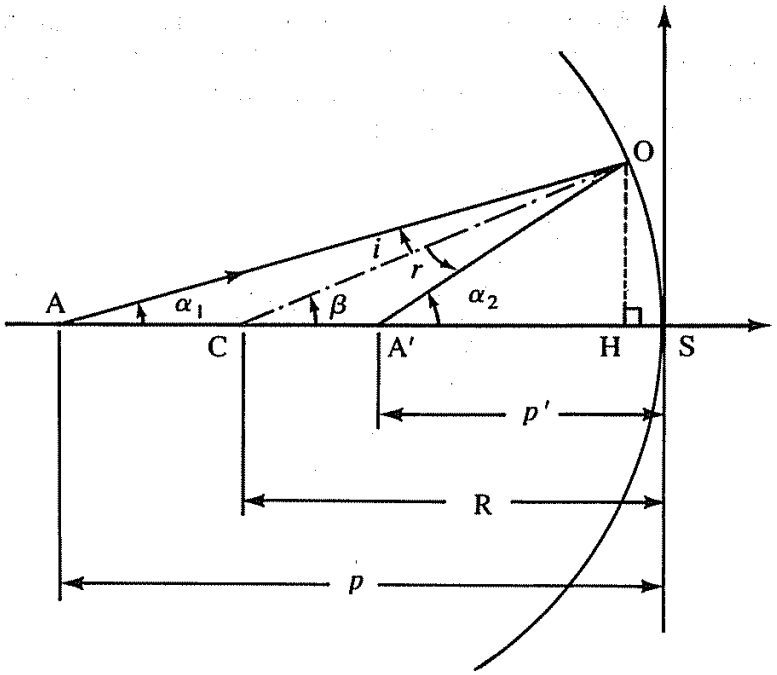


FIG. 10.9

et (10.5) devient :

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{AS}}+\frac{\overline{HO}}{\overline{A'S}}=\frac{2\overline{HO}}{\overline{CS}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}.$$

Posant $\overline{SA}=p$, $\overline{SA'}=p'$, $\overline{SC}=R$, $\overline{SF}=R/2=f$, ce résultat s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f},} \qquad (10.6)$$

formule de Descartes pour un miroir sphérique; elle implique que, dans cette approximation, tout point objet A a le même point image A' *quelle que soit l'inclinaison des rayons sur l'axe principal :* on dit que A et A' sont *stigmatiques* par rapport au miroir sphérique.

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe : pour que les rayons issus de B soient para-axiaux, il faut que l'objet soit de petite taille par rapport à la taille utile du miroir : *la faible ouverture du miroir et la petite taille de l'objet constitue l'approximation de Gauss* qui implique celle des rayons para-axiaux. (10.6) *est alors valable pour tous les points de l'objet.*

Supposons que AB s'éloigne à l'infini : $p=-\infty \longrightarrow 1/p=0$, $p'=R/2=f$; tous les points-objet à l'infini ont leur image dans le *plan focal* du miroir, perpendiculaire en F à l'axe principal et distant de $\overline{SF}=R/2$ du sommet S.

En particulier, l'image A' de A est F appelé le *foyer du miroir,* de *distance focale* $f=R/2$: pour un miroir concave, le foyer est réel et il est virtuel pour un miroir convexe (fig. 10.10a et b). L'examen de la figure 10.9 et de la relation (10.5) montre en plus que tout rayon lumineux venant de l'infini, parallèlement à l'axe, se réfléchit en passant par le foyer F : un faisceau de lumière parallèle à l'axe d'un miroir concave, converge vers le foyer, et diverge du foyer si le miroir est convexe.

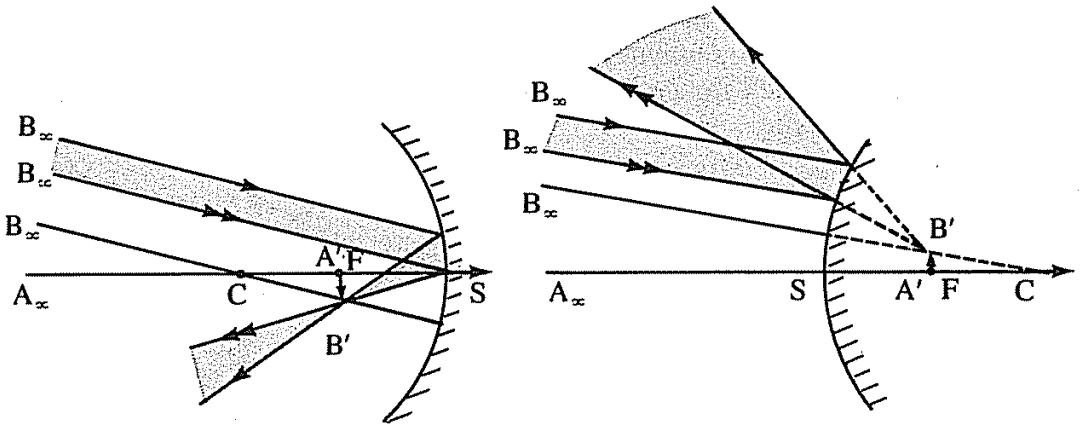


FIG. 10.10

Quand AB est à l'infini, le point B n'étant pas sur l'axe principal est sur un *axe secondaire* BC qui, normal au miroir, se réfléchit sur lui-même : l'image B′ de B est donc à l'intersection de cet axe secondaire et du plan focal : cette image B′ est également appelée *foyer secondaire* du miroir. Un faisceau de lumière parallèle à cet axe secondaire converge vers le foyer secondaire correspondant si le miroir est concave, semble en diverger si le miroir est convexe (fig. 10.10). Ces remarques permettent la détermination expérimentale (focométrie) du plan focal du miroir et par suite, de celle de son rayon $R = 2f$.

Nous avons porté sur les figures 10.11 a et b, les rayons secondaires que l'on utilise fréquemment pour la construction des images d'objets données

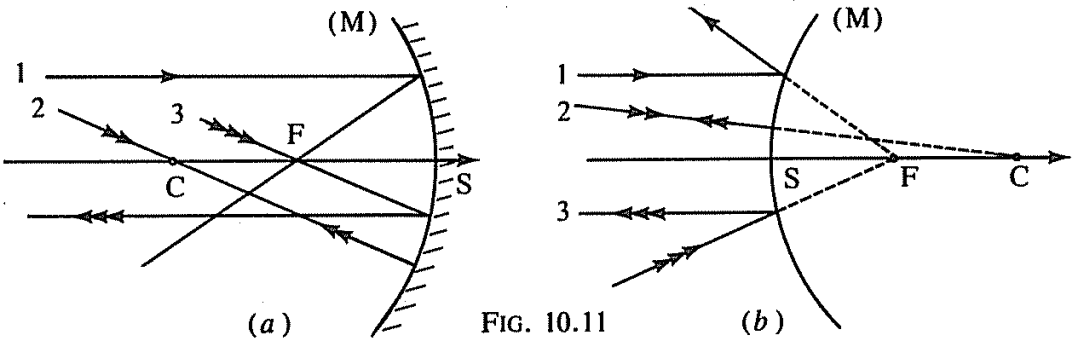


FIG. 10.11

par les miroirs sphériques. Les figures 10.12 a et b, montrent leur utilisation : en (*a*), un objet réel AB a une image réelle, plus petite et renversée; en (*b*), le même objet a une image virtuelle, plus petite et de même sens.

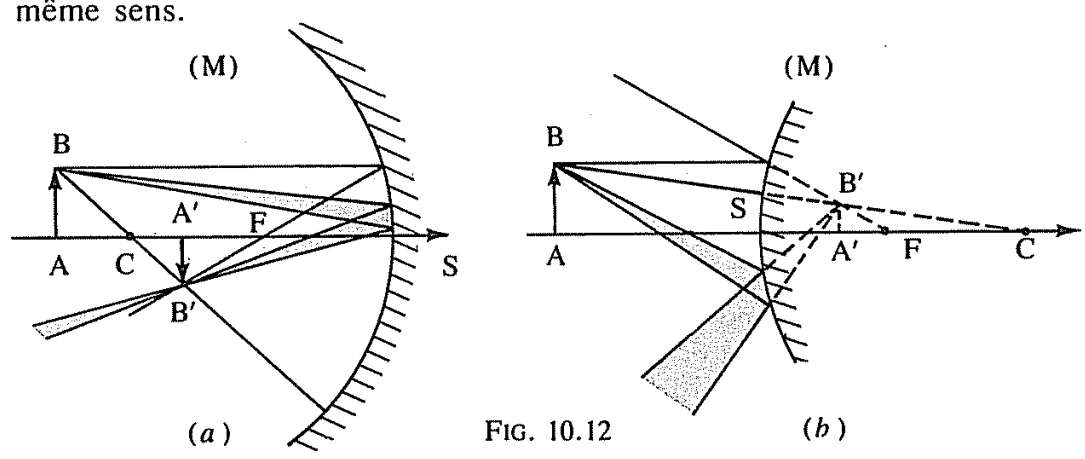


FIG. 10.12

La taille de l'image et son sens par rapport à l'objet s'étudie par l'expression du *grandissement* γ du miroir, défini comme le rapport de la mesure algébrique de l'image à celle de l'objet; si nous examinons la figure 10.13, nous avons :

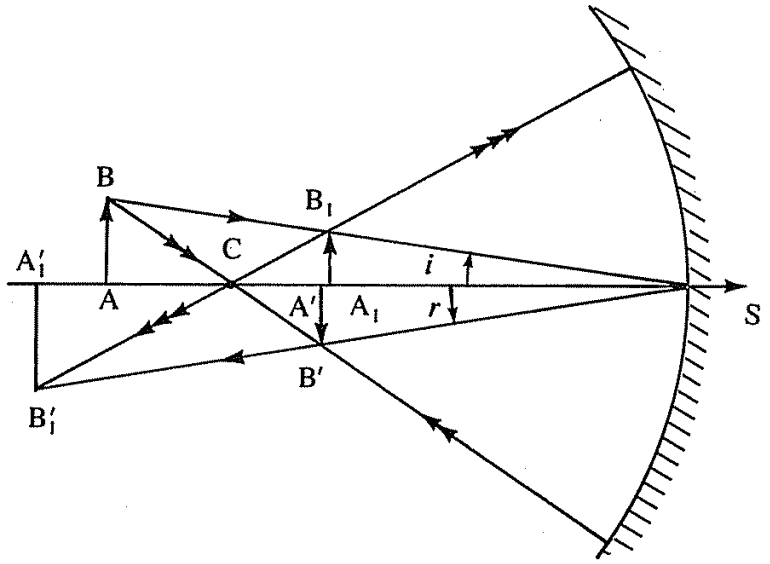


FIG. 10.13

$$\text{tg } i = \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AB}}{p}, \quad \text{tg } r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{A'B'}}{p'},$$

et : $\text{tg } i = -\text{tg } r$, soit :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'}{p}.} \qquad (10.7)$$

La figure 10.13 illustre les cas où $-1 < \gamma < 0$ pour (AB) et $\gamma < -1$ pour (A_1B_1).

L'utilisation conjointe des relations (10.6 et 7) permet aisément, en faisant varier p de $-\infty$ à 0 de calculer la position p' de l'image ainsi que sa taille, son sens et sa nature (réelle ou virtuelle) en fonction du type de miroir considéré (concave : $R<0, f<0$, convexe : $R>0, f>0$).

Les miroirs concaves sont employés comme réflecteurs pour les lampes (lanternes de projection, phares d'automobile, lampe frontale pour oto-rhino-laryngologie) ainsi que comme miroir grossissant pour la toilette : si l'objet est situé entre le sommet et le foyer du miroir, son image virtuelle est plus grande et de même sens. Le *champ* de ces miroirs, pour une position Ω de l'œil, s'obtient en construisant le cône issu de l'image Ω' de l'œil et s'appuyant sur le pourtour des miroirs (fig. 10.14a).

Les miroirs convexes servent surtout à la fabrication de rétroviseurs pour automobiles et motos : le conducteur peut, de son siège et sans se retourner, voir avec son orientation propre tout véhicule qui le suit. Dans ces conditions, la figure 10.14b montre que le champ d'un tel miroir est bien supérieur à celui du miroir plan de même pourtour MM'.

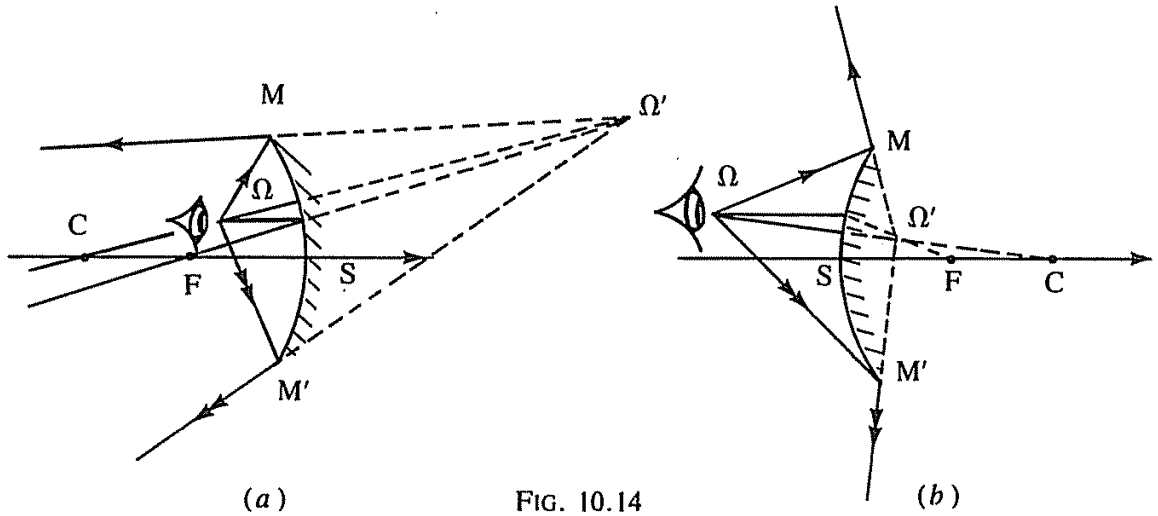


FIG. 10.14

5. RÉFRACTION PAR UN DIOPTRE SPHÉRIQUE

On appelle *dioptre sphérique* l'ensemble de deux milieux transparents, homogènes, d'indices différents, séparés par une surface sphérique (Σ). Le centre C et le rayon R de cette surface s'appellent respectivement *centre* et *rayon* du dioptre. Généralement, la surface dioptrique est une calotte dont le pôle S est le *sommet* du dioptre et l'origine de l'*axe principal* CS orienté par le sens de parcours de la lumière pris arbitrairement de gauche à droite; toute droite passant par C et rencontrant (Σ) est un *axe secondaire* et tout plan passant par l'axe principal est une *section principale.*

Considérons une section principale et un point lumineux A sur l'axe principal (fig. 10.15); le dioptre sphérique séparant deux milieux d'indices

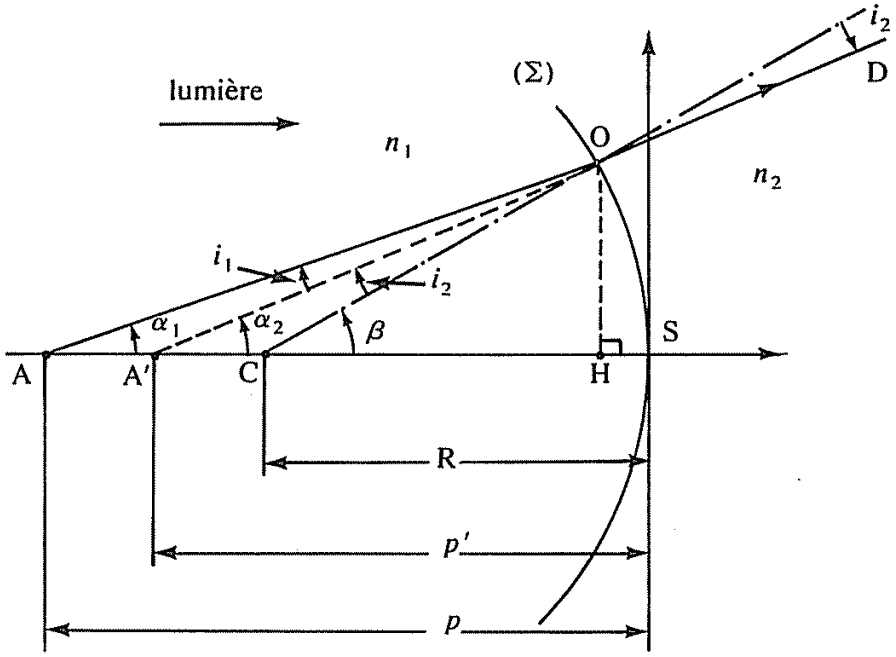


FIG. 10.15

n_1 et n_2 (numérotés conformément à l'orientation de l'axe principal) réfracte le rayon incident AO suivant OD dont le prolongement virtuel vers l'arrière coupe l'axe en A'. Comme AS traverse (Σ) sans déviation, A' *est l'image virtuelle de* A avec :

$$\beta = \alpha_1 - i_1, \quad \beta = \alpha_2 - i_2, \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Dans *l'approximation des rayons para-axiaux,* (i_1, i_2, α_1, α_2, β petits),

$$\sin i_1 \# i_1, \sin i_2 \# i_2 \longrightarrow n_1 i_1 = n_2 i_2,$$

soit :

$$n_1(\beta - \alpha_1) = n_2(\beta - \alpha_2) \longrightarrow -n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 = -(n_1 - n_2)\beta. \tag{10.8}$$

L'examen de la figure 10.15 montre que :

$$\alpha_1 \# \text{tg } \alpha_1 = \frac{\overline{HO}}{\overline{AH}} \# -\frac{h}{p}, \quad \alpha_2 \# \text{tg } \alpha_2 = \frac{\overline{HO}}{\overline{A'H}} \# -\frac{h}{p'},$$

$$\beta \# \text{tg } \beta = \frac{\overline{HO}}{\overline{CH}} \# -\frac{h}{R},$$

en posant : $h = \overline{HO}$, $p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$ et $R = \overline{SC}$. Dans ces conditions, (10.8) devient :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{p'} = \frac{n_1 - n_2}{R},} \tag{10.9}$$

formule de Descartes pour la réfraction au passage d'un dioptre sphérique.

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe : pour que les rayons issus de B soient para-axiaux, il faut que l'objet soit de petite taille par rapport à l'ouverture du miroir; *l'approximation de Gauss* (dioptre de faible ouverture et objet de petite taille) entraîne que (10.9) *est valable pour tous les points de l'objet.*

Supposons que AB s'éloigne vers l'infini : $p = -\infty \longrightarrow p' = -\dfrac{n_2}{n_1 - n_2} R$; tous les points-objet à l'infini ont leur image dans le *plan focal image,* perpendiculaire en F_2 à l'axe principal et distant de $f_2 = -\dfrac{n_2}{n_1 - n_2} R$ de S. En particulier, l'image F_2 de A_∞ est le foyer-image du dioptre :

— si F_2 *est réel,* le dioptre (Σ) recevant un faisceau parallèle à son axe principal le transforme en un faisceau convergent (fig. 10.16a); il est dit *convergent;*

— si F_2 *est virtuel,* le dioptre (Σ) transforme un faisceau parallèle à son axe en un faisceau divergent; il est dit *divergent* (fig. 10.16b).

L'examen de la figure 10.16 montre que les définitions ci-dessus sont équivalentes aux relations algébriques :

$$\boxed{\text{dioptre convergent : } f_2 > 0, \text{ dioptre divergent : } f_2 < 0.} \tag{10.10}$$

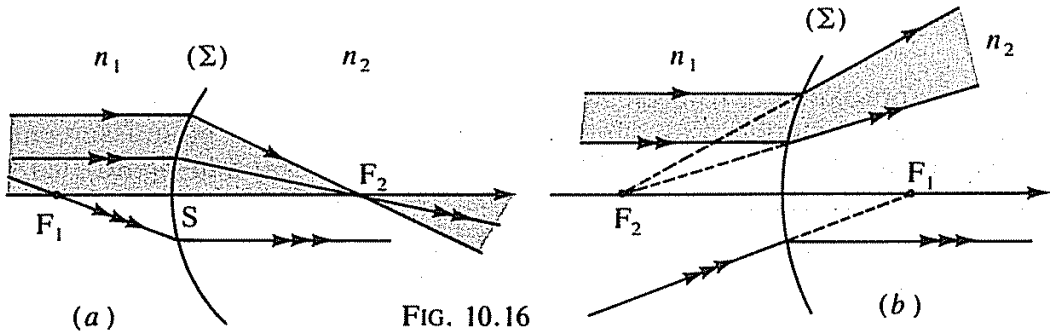


FIG. 10.16

Il existe une position particulière F_1 du point-objet pour laquelle son image est à l'infini : $p' = \infty \longrightarrow p = \dfrac{n_1}{n_1 - n_2} R$; F_1 est le *foyer objet* du dioptre, $f_1 = p$ la *distance focale objet,* le plan perpendiculaire en F_1 à l'axe principal le *plan focal objet.*

$$\boxed{f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R, \quad f_2 = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} R.} \qquad (10.11)$$

De $f_1/n_1 = -f_2/n_2$, n_1 et $n_2 > 0$, il résulte que f_1 et f_2 sont toujours de signes contraires : *les foyers* F_1 *et* F_2 *sont de part et d'autre du dioptre* (Σ) et leurs distances focales vérifient la relation : $f_1 + f_2 = R$.

En combinant les équations (10.9) et (10.11), on a encore :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{p'} = \frac{n_1}{f_1} = -\frac{n_2}{f_2}.} \qquad (10.12)$$

Nous avons porté sur la figure 10.17 divers cas de construction de l'image A'B' d'un objet réel AB par utilisation de rayons secondaires particuliers.

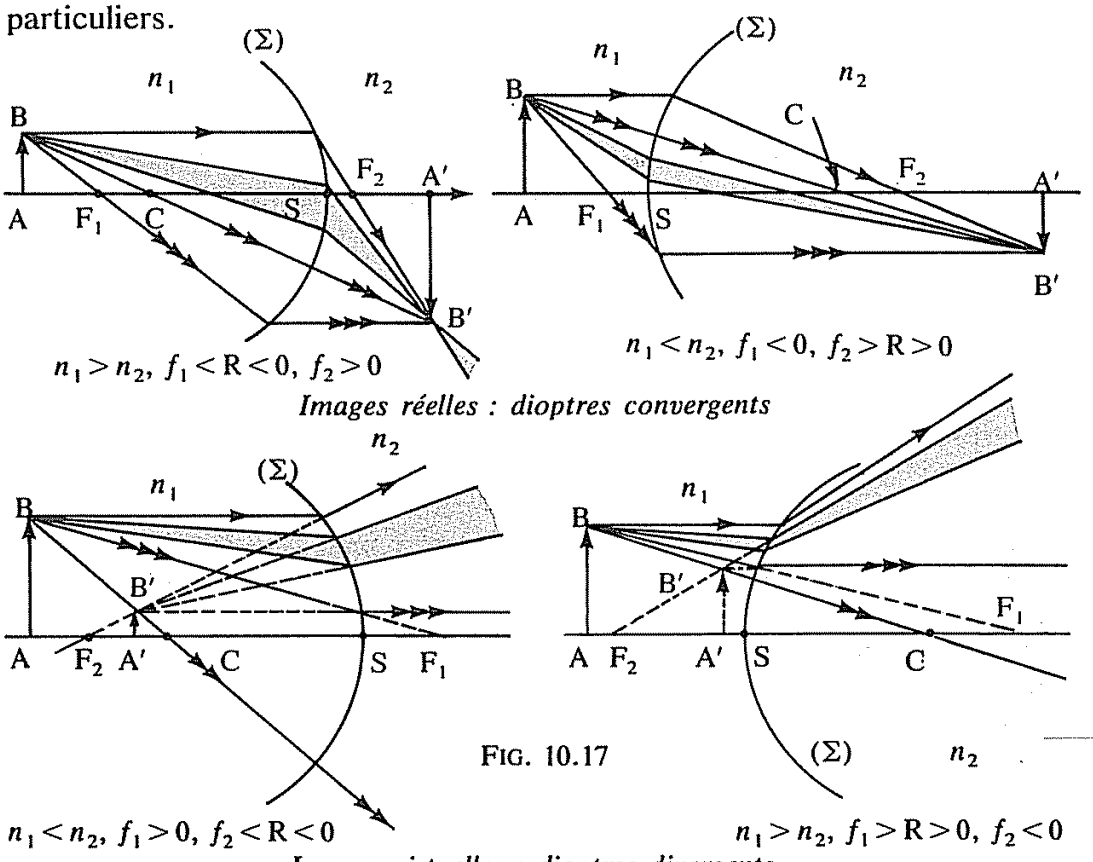


FIG. 10.17

Dans l'approximation de Gauss, (10.12) indique qu'il n'existe qu'une seule image ponctuelle d'un objet ponctuel. Calculons le grandissement correspondant défini par $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB}$ en nous reportant à la figure 10.18 d'un dioptre divergent ($n_1 < n_2$, $f_1 > 0$, $f_2 < R < 0$) :

$$i_1 \# \operatorname{tg} i_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AB}}{p}, \quad i_2 \# \operatorname{tg} i_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{A'B'}}{p'}, \quad n_1 i_1 = n_2 i_2,$$

impliquent :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p' i_2}{p i_1} = \frac{n_1 p'}{n_2 p};$$

$$\boxed{\gamma = \frac{n_1 p'}{n_2 p}.} \qquad (10.13)$$

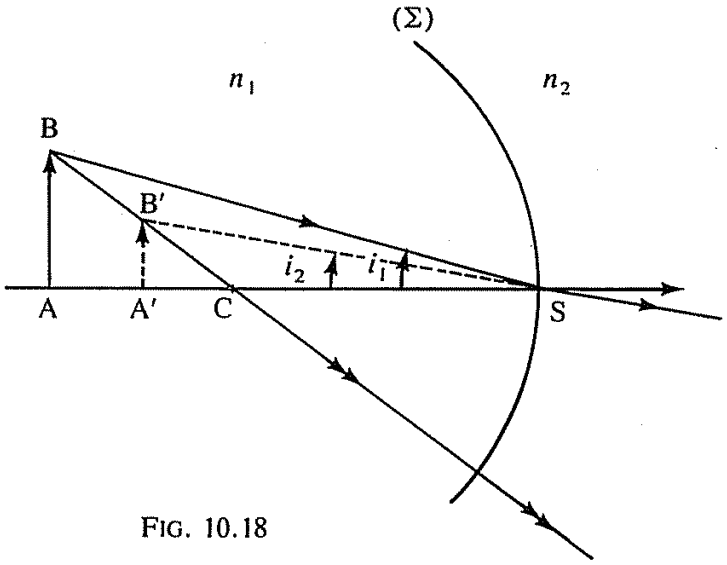


FIG. 10.18

On vérifie que dans le cas présent ($n_1 < n_2$), $0 < \gamma < 1$: le dioptre divergent donne d'un objet réel une image virtuelle plus petite et de même sens.

6. LENTILLES MINCES

Une lentille est un milieu transparent homogène limité par deux dioptres : très souvent, ces dioptres sont sphériques mais l'un d'eux peut être plan (fig. 10.20); de même, il est fréquent que les indices des milieux n_1 et n_3 qui baignent la lentille soient égaux.

Nous ne considérerons ici que des *lentilles minces,* c'est-à-dire dont l'épaisseur maximum $e = \overline{S_1S_2}$ (fig. 10.19) est très petite devant les rayons de courbure $\overline{S_1C_1} = R_1$ et $\overline{S_2C_2} = R_2$ des dioptres.

Soit S_1 et S_2 les sommets des dioptres dans l'ordre où la lumière les rencontre en se propageant de gauche à droite. *L'axe optique* est la droite orientée S_1S_2 sur laquelle on peut porter les centres C_1 et C_2 des dioptres.

La lumière issue de l'objet ponctuel A situé sur l'axe optique rencontre, dans l'ordre, les milieux d'indices respectifs n_1, n_2 et n_3; à chaque traversée de dioptre, elle est réfractée et la relation (10.12) s'applique :

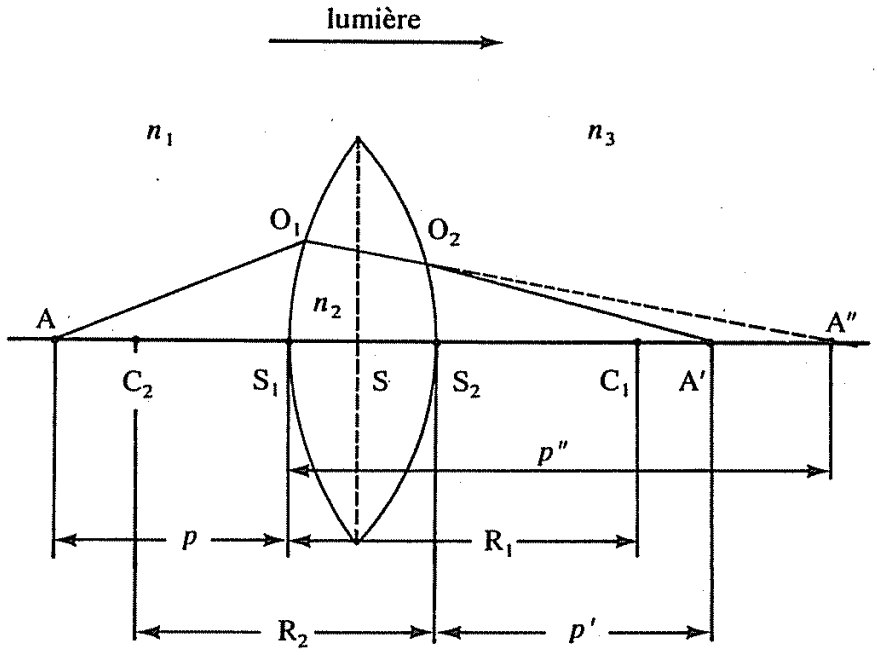


FIG. 10.19

a) rayon incident AO_1 dans n_1 ⟶ rayon réfracté O_1O_2A'' dans n_2; si $\overline{S_1A} = p$, $\overline{S_1A''} = p''$, on a : $\dfrac{n_1}{p} - \dfrac{n_2}{p''} = \dfrac{n_1 - n_2}{R_1}$;

b) rayon O_1O_2A'' dans n_2 ⟶ rayon réfracté O_2A' dans n_3; si $\overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = p'' - e$, $\overline{S_2A'} = p'$, on a : $\dfrac{n_2}{p'' - e} - \dfrac{n_3}{p'} = \dfrac{n_2 - n_3}{R_2}$.

La lentille étant supposée mince ($e \ll R_1$ et R_2), *nous négligerons son épaisseur e,* ce qui revient à mesurer toutes les distances optiques à partir d'une origine commune S. L'addition des deux relations ci-dessus donne alors :

$$\left(\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{p''}\right) + \left(\frac{n_2}{p''} - \frac{n_3}{p'}\right) = \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2},$$

soit :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} - \frac{n_3}{p'} = \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2},} \qquad (10.14)$$

formule de Descartes pour les lentilles minces dans l'approximation de Gauss.

Dans le cas où $n_1 = n_3$, en posant $n = n_2/n_1 = n_2/n_3$ indice relatif de la lentille par rapport au milieu qui la baigne, on retrouve la formule habituelle :

$$1/p - 1/p' = (n - 1)(1/R_2 - 1/R_1).$$

Comme pour un dioptre unique, quand l'objet AB, perpendiculaire à l'axe optique, s'éloigne à l'infini :

$$p = \infty \longrightarrow \frac{n_3}{p'} = \frac{n_3}{f'} = -\left(\frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right)$$

tous les rayons parallèles à l'axe passent (réellement ou virtuellement) par un même point, le *foyer-image* F′ contenu dans le *plan focal-image* perpendiculaire à l'axe optique. De même, tout rayon passant par le *foyer-objet* F ressort parallèlement à l'axe optique

$$p' = \infty \longrightarrow \frac{n_1}{p} = \frac{n_1}{f} = \left(\frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right) :$$

le *plan focal-objet* est perpendiculaire à l'axe et le coupe en F_1 à la distance focale-objet f.

$$\boxed{f = n_1 \Big/ \left[\frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right], \quad f' = -n_3 \Big/ \left[\frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right].} \qquad (10.15)$$

L'utilisation de ces distances focales permet d'écrire (10.14) sous la forme :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} - \frac{n_3}{p'} = \frac{n_1}{f} = -\frac{n_3}{f'},} \qquad (10.16)$$

et il en découle que les foyers sont toujours de part et d'autre de la lentille.

Remarque. Dans le cas où $n_1 = n_3$, $1/f = -1/f' = (n-1)(1/R_2 - 1/R_1)$ avec $n = n_2/n_1$: pour une lentille mince baignée par le même milieu, les deux foyers sont disposés symétriquement par rapport à la lentille et l'on a : $1/p - 1/p' = 1/f$.

Par combinaison de dioptres sphériques et plans et dans le cas où $n_2 > n_1 = n_3$, il n'y a que six formes possibles de lentilles, dont trois sont de *type convergent,* leur distance focale image étant positive ($f' > 0$), et trois de *type divergent* avec $f' < 0$ (fig. 10.20).

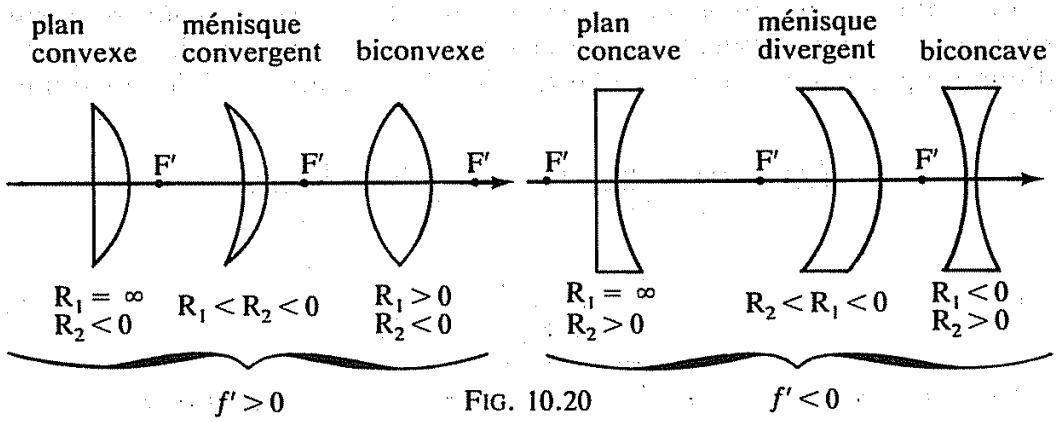


FIG. 10.20

Les lentilles convergentes sont caractérisées par leurs bords minces : on les représente généralement par le schéma de la figure 10.21 a; quant aux lentilles divergentes, aux bords épais, elles sont schématisées par la figure 10.21 b. La figure 10.22 montre la construction de l'image A′B′ d'un objet réel AB dans le cas d'une lentille convergente (*a*) et dans celui d'une lentille divergente (*b*), les milieux baignant les lentilles étant identiques.

Le grandissement étant défini par $\gamma = \overline{A'B'}/\overline{AB}$, on a aussi : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} \cdot \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}$ si A″B″ est l'image intermédiaire donnée par le dioptre

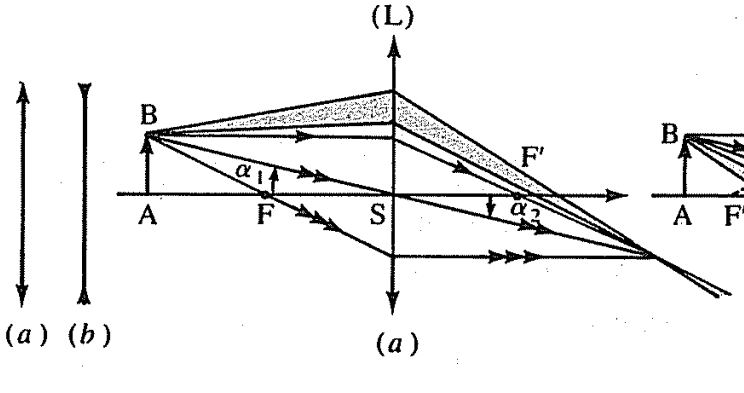


FIG. 10.21

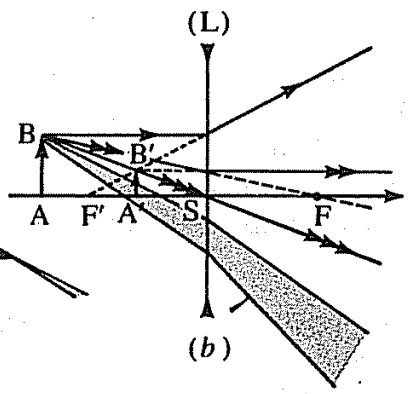


FIG. 10.22

(n_1, n_2) qui sert d'objet intermédiaire pour le dioptre (n_2, n_3); d'où il vient :

$$\gamma = \gamma_{12} \cdot \gamma_{23} = \frac{n_1 p''}{n_2 p} \cdot \frac{n_2 p'}{n_3 p''} = \frac{n_1}{n_3} \frac{p'}{p};$$

$$\boxed{\gamma = \frac{n_1 p'}{n_3 p},} \qquad (10.17)$$

(qui se réduit à $\gamma = p'/p$ si $n_1 = n_3$).

QUELQUES EXEMPLES DE SYSTÈMES OPTIQUES

7. LA LOUPE

Une *loupe* est une *lentille convergente* généralement biconvexe : on l'utilise pour obtenir d'un objet réel (timbre, texte finement écrit, défauts de surface) une *image virtuelle et agrandie :* pour ce faire, il faut donc approcher la loupe de l'objet jusqu'à ce que celui-ci soit compris entre le foyer-objet F et la lentille (fig. 10.23).

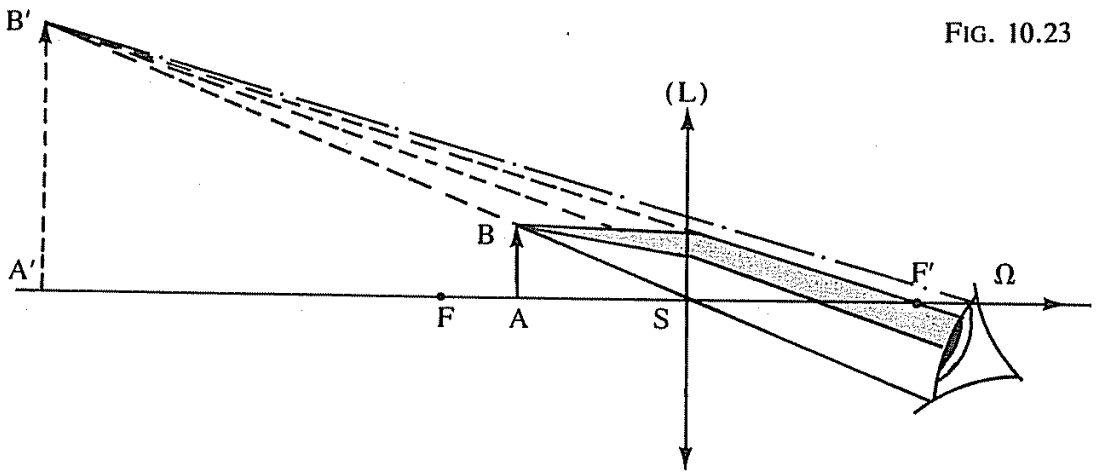


FIG. 10.23

Ajoutons de plus, que pour cet usage, la loupe est baignée par l'air donc $n_2 > n_1 = n_3$.

Supposons l'œil de l'observateur en Ω : il voit, sans loupe, l'objet sous l'angle $\alpha = (\Omega A, \Omega B)$ avec $\text{tg}\,\alpha = \overline{AB}/\overline{\Omega A}$. Avec la loupe, il voit l'image sous l'angle $\alpha' = (\Omega A', \Omega B')$ avec $\text{tg}\,\alpha' = \overline{A'B'}/\overline{\Omega A'}$. Le rapport α'/α définit le *grossissement* G de la loupe pour cet observateur; des relations dues à l'approximation de Gauss, il découle :

$$\alpha' \# \text{tg}\,\alpha' = \overline{A'B'}/\delta, \quad \alpha \# \text{tg}\,\alpha = \overline{AB}/d,$$

en appelant $\delta = \overline{\Omega A'}$ la *distance de visée,* et d la *distance minimum de vision distincte* à laquelle l'observateur approche son œil de l'objet pour le voir au mieux sans la loupe.

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\delta} \times \frac{d}{\overline{AB}} = \gamma \frac{d}{\delta},} \qquad (10.18)$$

si γ est le grandissement de la loupe. Or, plus l'objet est près du foyer F, plus γ est grand; l'observateur met donc F au voisinage de AB ce qui entraîne $p \# f$; dans ces conditions, il se déplace pour voir l'image, à travers la loupe, à la distance de visée.

$\overline{\Omega A'} = \delta = p' + a$, si $a = \overline{\Omega S}$ est la distance de l'œil à la loupe. Ainsi : $\gamma = p'/p \# (\delta - a)/f$, d'où :

$$G = \frac{\delta - a}{f} \frac{d}{\delta} = \frac{d}{f}(1 - a/\delta).$$

Le grossissement dépend donc de l'instrument (f), des conditions de son emploi (position relative de l'œil : a; distance de visée : δ) et de l'observateur (d). On définit le *grossissement intrinsèque* ou *nominal* G_i de la loupe par :

$$\boxed{G_i = d/f.} \qquad (10.19)$$

Comme pour un œil normal, $d \sim 0{,}25$ m, le nombre qui mesure le *grossissement commercial* G_c d'une loupe est le quart de celui qui mesure sa convergence ($C = 1/f$) en dioptries :

$$C = \frac{1}{f(\text{m})} \text{ dioptries}, \quad G_c = \frac{0{,}25}{f(\text{m})} = \frac{C}{4}. \qquad (10.20)$$

Exemple. Une loupe de distance focale $f = 5$ cm a une convergence $C = 1/0{,}05 = 20$ dioptries et un grossissement commercial $G_c = 5$.

Pour caractériser la loupe par un facteur indépendant de la vue (d) de l'observateur, on a été amené à définir sa *puissance* P par :

$$\boxed{P = \alpha'/\overline{AB}.} \qquad (10.21)$$

rapport de l'angle supposé petit sous lequel l'image est vue à travers l'instrument *(son diamètre apparent)* à la longueur de l'objet. De (10.18), il vient :

$$G = \alpha'/\alpha = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} d = Pd \longrightarrow P = G/d.$$

L'expression générale de la puissance est donc :

$$\boxed{P = \frac{1}{f}(1 - a/\delta).} \qquad (10.22)$$

On appelle alors *puissance nominale ou intrinsèque* P_i celle correspondant à $G_i(a = 0)$:

$$\boxed{P_i = 1/f.}$$

8. LE MICROSCOPE

De manière extrêmement simplifiée, on peut considérer un microscope comme un système centré constitué de deux lentilles convergentes de faibles distances focales; celle qui est la plus proche de l'objet AB est *l'objectif* (L_1), l'autre plus proche de l'œil de l'observateur Ω, l'*oculaire* (L_2) : en général f_1, distance focale de l'objectif, est très faible devant f_2, celle de l'oculaire, elle-même très petite devant le distance de séparation (L_1, L_2).

L'objectif (L_1) donne de l'objet AB situé à une distance $p < f_1$, une image réelle A″B″, renversée et plus grande. L'oculaire (L_2) fonctionnant en loupe donne une image A′B′, toujours renversée et encore plus grande (fig. 10.24).

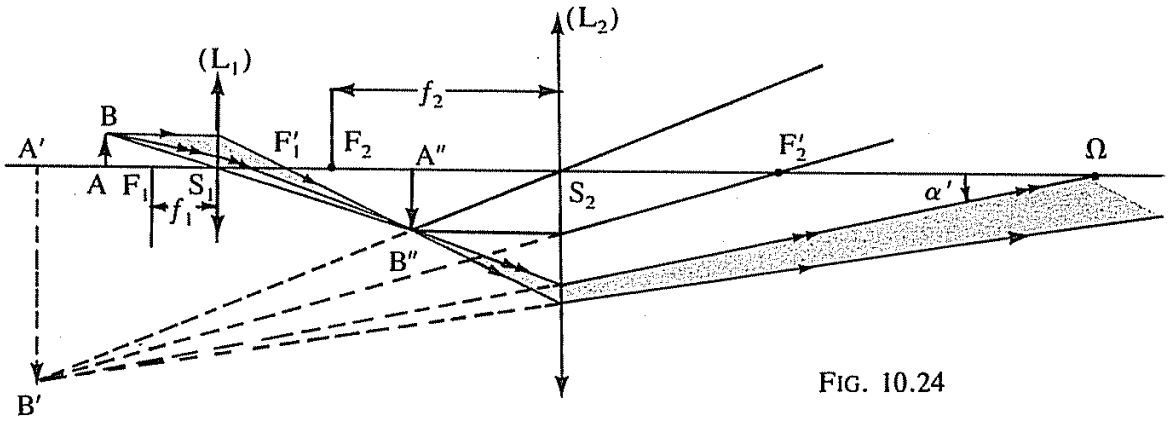


FIG. 10.24

Soit G le grossissement du microscope défini comme le rapport α'/α de l'angle de l'image finale A′B′ vue à travers l'instrument, par l'œil placé en Ω, à l'angle α sous lequel l'observateur verrait l'objet à l'œil nu, à la distance minimum de vision distincte d.

$$\boxed{G = \alpha'/\alpha.} \qquad (10.23)$$

De $\alpha \# \operatorname{tg} \alpha = \overline{AB}/d$, il vient :

$$G = \alpha'/\alpha = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}\, d = Pd,$$

soit :

$$\boxed{G = Pd,} \qquad (10.24)$$

P étant la puissance de l'instrument définie comme pour la loupe par (10.21).

Si on remplace le système optique que constitue un microscope par une seule lentille, on peut calculer la distance focale image f' de cette lentille équivalente. Alors, la puissance du microscope devient, comme pour une loupe :

$$P = \frac{1}{f'}(1 - a/\delta),$$

et la puissance intrinsèque ($a = 0$) vaut : $P = 1/f'$.

Le grossissement commercial du microscope s'obtient en prenant pour P la puissance intrinsèque P_i et $d = 0{,}25$ m :

$$\boxed{G_c = P_i \times 0{,}25 = P_i/4.}$$

Il varie de 25 à 2500, atteignant exceptionnellement 3000.

Le *pouvoir séparateur* d'un instrument d'optique est la distance linéaire minimum de deux points du plan objet dont l'instrument donne deux images *distinctes*. Celui du microscope est en fait celui de l'objectif, dont on peut démontrer qu'il est limité par les phénomènes de diffraction (chap. 11) et est donné par :

$$y = \frac{1{,}22\lambda}{2n_1 \sin\theta}, \qquad (10.25)$$

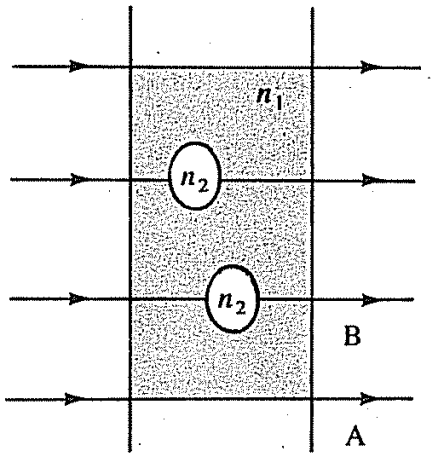
n_1 étant l'indice du milieu objet, λ la longueur d'onde de la lumière traversant le microscope et θ l'angle qu'un rayon marginal fait avec l'axe optique du microscope. La limite y est d'autant plus petite que *l'ouverture numérique* $n_1 \sin\theta$ de l'objectif est plus grande : on sait corriger les déformations de l'objectif (aberrations dues au non-respect de l'approximation de Gauss) et atteindre des θ de l'ordre de 75°; en utilisant des objectifs à immersion (eau : $n_1 = 1{,}33$; huile de cèdre : $n_1 = 1{,}52$; iodure de méthyle : $n_1 = 1{,}74$) qui remplacent l'air par un liquide transparent d'indice plus élevé, on atteint alors un produit $n_1 \sin\theta \sim 1{,}74 \times \sin 75 = 1{,}68$ qui, pour $\lambda \sim 0{,}55\ \mu$m, donne $y \sim 0{,}2\ \mu$m comme limite de la séparation obtenue dans les meilleurs microscopes.

9. MICROSCOPE A CONTRASTE DE PHASE

9.1 Principe du contraste de phase

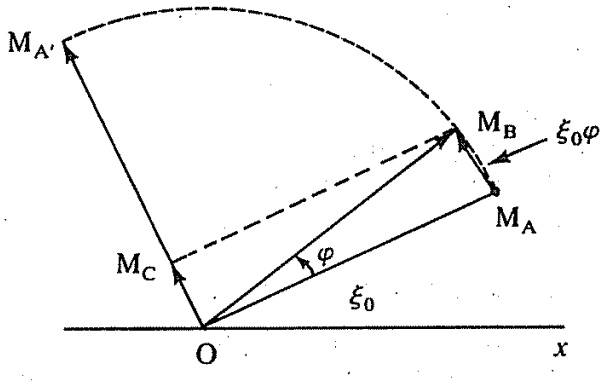
On a souvent à observer des objets biologiques qui ne se distinguent pratiquement pas du reste de la préparation. Néanmoins, leur indice est légèrement différent de celui, n_1, de la préparation; la lumière qui les traverse est donc, comme nous l'avons établi au paragraphe 3 du chapitre 9, légèrement déphasée par rapport à celle qui a traversé la préparation. Si $n_2 > n_1$, l'onde en B est en avance de phase de φ (petit) par rapport à l'onde en A (fig. 10.25); les intensités étant très voisines en A et B, les amplitudes sont aussi sensiblement égales. De tels objets sont dits « objets de phase ».

FIG. 10.25



Préparation

FIG. 10.26



On peut donc les représenter (fig. 10.26) par les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}_A$ et $\overrightarrow{OM}_B$ avec $|OM_A| = |OM_B| = \xi_0$ et $(\overrightarrow{OM}_A, \overrightarrow{OM}_B) = \varphi$, et écrire :

$$\overrightarrow{OM}_B = \overrightarrow{OM}_A + \overrightarrow{M_AM_B} = \overrightarrow{OM}_A + \overrightarrow{OM}_C,$$

avec :

$$\overrightarrow{OM}_C = \overrightarrow{M_AM_B},\ |OM_C| = \xi_C \# \xi_0\varphi \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM}_A, \overrightarrow{OM}_C) \# \pi/2.$$

Cette égalité vectorielle se traduit de la manière suivante : l'onde qui a traversé un objet de phase est la résultante de l'onde directe ξ_A et d'une onde ξ_C de faible amplitude ($\xi_0\varphi$) déphasée de $+\pi/2$. D'après le principe d'Huyghens, les ondes sphériques de même amplitude et même phase émises par les différents points du plan (π) reconstituent une onde plane, l'onde principale; se superposent à cette onde plane, les ondes sphériques faibles telles que ξ_C.

Il est important de remarquer que le déphasage, entre ξ_A et ξ_B ou entre ξ_A et ξ_C reste inchangé au cours de la propagation ultérieure des deux ondes, pourvu que les chemins optiques parcourus soient égaux; ce sera le cas en particulier dans le plan (π'), image de (π), à travers une lentille — ou tout autre système optique — (fig. 10.27 a).

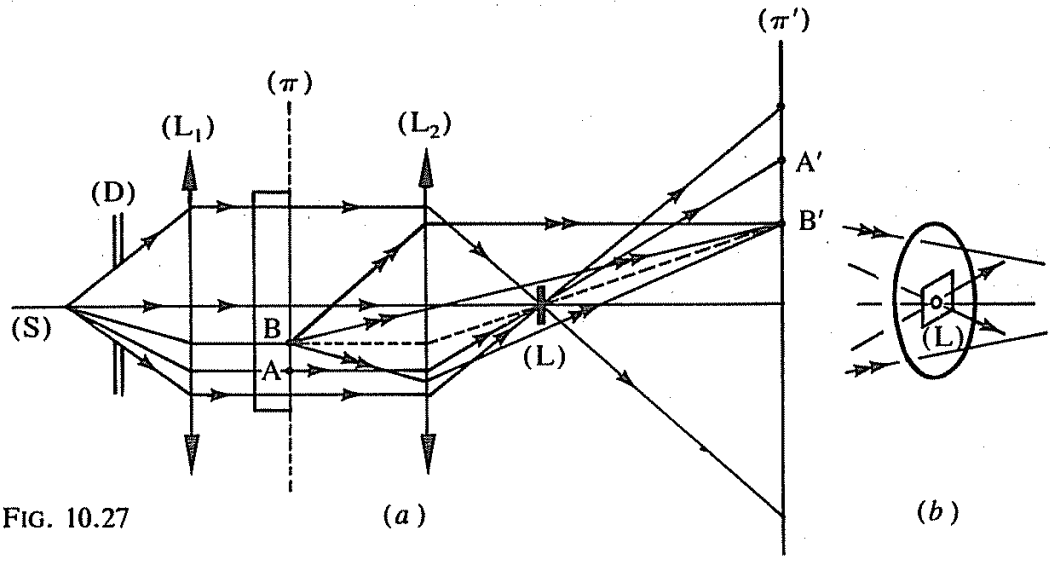


FIG. 10.27 (a) (b)

Si on déphase alors, entre (π) et (π'), l'onde principale de $\pi/2$, l'image B′ de B résulte de la composition de l'onde $\overrightarrow{OM}_A$. (amplitude ξ_0, phase $\pi/2$ par rapport à ξ_A) et de l'onde OM_C (amplitude $\xi_0\varphi$, même phase); l'amplitude de l'onde résultante est $\xi_0(1+\varphi)$, son intensité $\xi_0^2(1+\varphi)^2 \# \xi_0^2(1+2\varphi)$; alors qu'au point A′, image de A, elle vaut ξ_0^2.

Le déphasage a donc été utilisé pour faire apparaître une variation d'intensité : les objets de phase apparaissent plus brillants que le fond. C'est le principe du *contraste de phase.*

On peut évidemment obtenir le résultat opposé (objets sombres sur fond clair) en déphasant l'onde principale de $-\pi/2$.

9.2 Réalisation pratique

La lumière doit avoir même phase quand elle atteint la préparation; le faisceau parallèle doit donc être obtenu à partir d'une source ponctuelle (S).

Pour déphaser l'onde principale, on profite du fait qu'elle est plane alors que les ondes émises par les objets de phase sont sphériques; le déphasage est obtenu avec une lame (L) quart d'onde ($+\pi/2$), ou trois-quarts d'onde ($+3\pi/2$ ou $-\pi/2$), placée au foyer-image de la lentille (L_2) et qui intercepte toute l'onde principale sans affecter les ondes sphériques (fig. 10.27 b) émises par les objets de phase.

10. MICROSCOPE INTERFÉRENTIEL A DEUX ONDES

10.1 Principe d'un interféromètre à deux ondes

Soit une lame de verre d'indice n_2, d'épaisseur e_1, baignée par de l'air d'indice n_1. Éclairons cette lame par un rayon lumineux monochromatique sous un angle d'incidence de 45° : le rayon incident SA (fig. 10.28) est partiellement réfléchi selon AA′, et partiellement réfracté selon AB. Si la deuxième face de lame de verre est argentée, ce rayon se réfléchit selon BC puis est réfracté et ressort parallèlement à AA′. Le chemin optique parcouru par le rayon réfracté ABC vaut : $\delta = n_2(AB + BC) = 2n_2 \dfrac{e_1}{\sqrt{2}} = n_2 e_1 \sqrt{2}$. Par suite, entre les deux ondes réfractée et réfléchie, il y a une différence de phase $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda} n_2 e_1 \sqrt{2}$: pour une qualité de verre donné, le choix de l'épaisseur e_1 de la lame permet de donner à la phase la valeur $\varphi_1 = (2n+1)\pi$, ce qui entraîne que l'*onde émergente en* C *est en opposition de phase par rapport à celle qui est réfléchie en* A.

Si on dispose un deuxième miroir parallèle au précédent, on peut calculer de même son épaisseur e_2 pour que le rayon réfléchi C′S′ et le rayon réfracté A′B′C′ conservent la différence de phase qu'ils ont au moment d'aborder le miroir. Il suffit pour cela, que :

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 e_2 \sqrt{2} = 2n'\pi, \quad (n' \text{ entier}).$$

Les deux ondes qui se recombinent en C′S′ ont la même amplitude et sont en opposition de phase : il s'en suit qu'il y a *interférence destructive* et qu'aucune lumière ne peut être observée à la sortie de cet interféromètre.

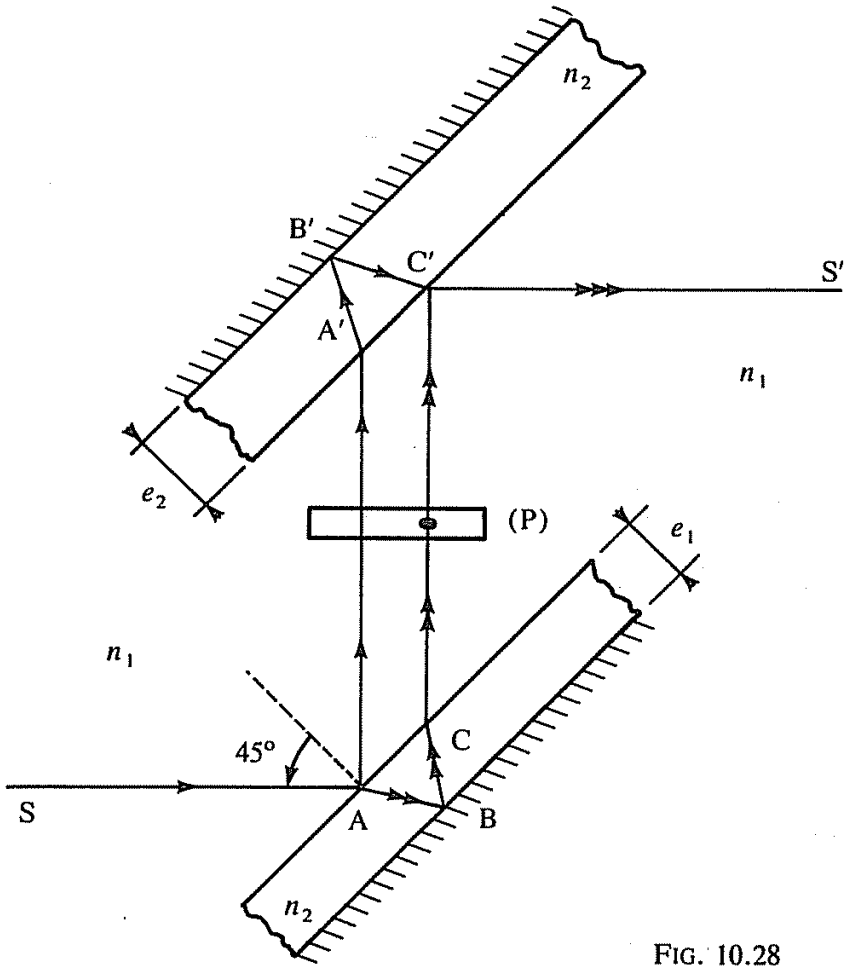


FIG. 10.28

10.2 Microscope interférentiel à deux ondes

C'est l'association d'un interféromètre du type ci-dessus et d'un microscope optique. L'interféromètre divise le faisceau monochromatique issu de (S) en deux rayons AA'B'C' et ABCC' en opposition de phase (fig. 10.28); la préparation (P) contenant les objets déphasants est placée entre les deux miroirs et traversée par l'ensemble des rayons. Le deuxième miroir de l'interféromètre recombine ces rayons en un seul qui pénètre dans le microscope.

En l'absence d'objet déphasant, les ondes AA' et CC' ayant toutes deux traversé (P), restent en opposition de phase : le champ d'observation du microscope est obscur. Lorsqu'un objet introduit une petite différence de phase φ entre les deux rayons (par exemple, s'il est sur le trajet de CC', l'onde CC' est en avance de φ sur l'onde AA'), le même raisonnement qu'au paragraphe 9.1 montre que l'onde émergente C'S' de l'interféromètre est la résultante des ondes en opposition de phase AA' et CC' et d'une onde ξ_C de faible amplitude ($\xi_0\varphi$) déphasée de $\pi/2$ (par rapport à l'onde CC', pour l'exemple retenu); seule cette onde sphérique éclaire le système optique que constitue le microscope : *l'objet apparaît brillant sur fond noir.*

11

INTRODUCTION AUX PHÉNOMÈNES DE DIFFRACTION

1. ORIGINE DES PHÉNOMÈNES DE DIFFRACTION

En optique géométrique, nous savons supposé que la lumière se propage par segments de droite même quand les faisceaux lumineux rencontrent des diaphragmes; c'est ainsi que sur la figure 11.1 un point P situé dans le « cône de lumière » monochromatique d'origine S et limité par la pupille de l'écran ($\mathcal{E}$) est éclairé alors qu'un point P' hors de ce cône ne l'est pas et reste dans l'ombre. Le phénomène réel est en fait plus complexe; l'écran ($\mathcal{E}$) limite les surfaces d'ondes sphériques (Σ) qui se propagent vers lui : par conséquent, la construction d'Huyghens ne s'applique qu'à la calotte sphérique s'appuyant sur la pupille; tous les points de cette calotte deviennent des sources secondaires d'ondes sphériques et c'est ainsi que

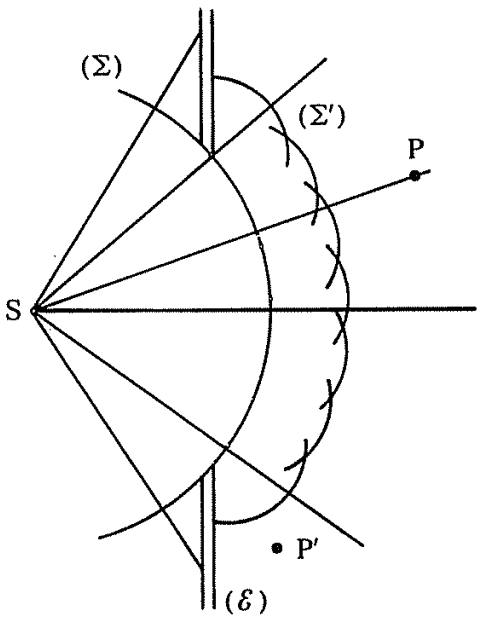


FIG. 11.1

P', situé théoriquement dans la zone d'ombre, pourra être éclairé parce qu'atteint par une onde secondaire émise au voisinage du cône de lumière. Autrement dit, la nouvelle surface d'onde (Σ') n'est plus exactement une calotte sphérique.

Les effets de diffraction apparaissent donc quand une surface d'onde est déformée par un obstacle : ils deviennent très marqués quand cet obstacle a des dimensions comparables à celles de la longueur d'onde du rayonnement (exemples : fil très fin, très petit trou dans un écran, défaut de faible diamètre dans un bloc de verre).

Ce phénomène limite, comme nous l'avons signalé au paragraphe 8 du chapitre 10, le pouvoir de résolution du microscope. C'est la raison essentielle qui conduit les biologistes et physiciens à utiliser des microscopes employant des longueurs d'onde plus courtes : microscopes à ultraviolet, microscopes électroniques et à rayons X. Mais, si sa présence est regrettable en certains cas, elle peut être mise à profit, par exemple, pour disperser la lumière grâce aux réseaux de diffraction qui sont en fait des écrans à structure périodique comme nous le verrons au paragraphe 4.

La diffraction n'apparaît pas seulement en optique; elle est d'observation très courante en acoustique : même venant de derrière un obstacle, un son peut être entendu, voire renforcé par rapport à ce qu'il serait en l'absence d'obstacle.

La diffraction acoustique a trouvé (ou retrouvé) un large champ d'application avec l'utilisation des ultrasons comme procédé non destructif d'exploration, en métallurgie par exemple, et plus récemment dans le domaine biologique et médical (microscopie acoustique, échographie).

On distingue habituellement deux types de phénomènes de diffraction :

1° *Les phénomènes de diffraction de Fresnel,* observables à courte distance de l'objet diffractant.

Soit un écran plan (π) éclairé uniformément par une source (S) d'ondes sphériques. En interposant un diaphragme ($\mathcal{E}$) muni d'une petite ouverture (Ω), on observe sur (π) des figures de diffraction dont l'analyse a été faite par Fresnel (fig. 11.2).

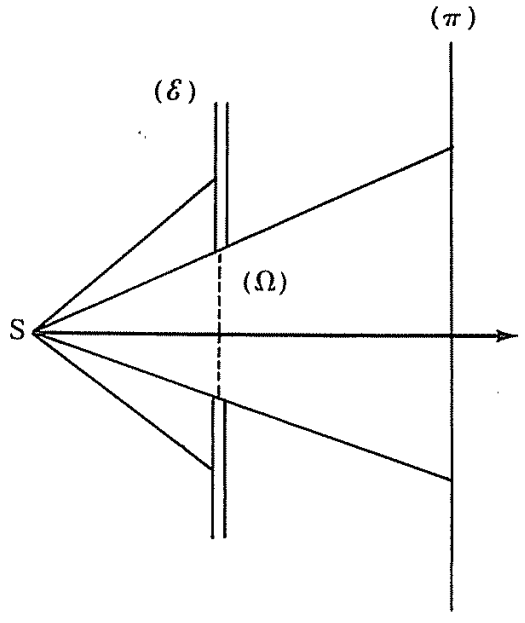


FIG. 11.2

L'étude mathématique de la diffraction de Fresnel est relativement délicate; aussi elle ne sera pas abordée ici. On citera seulement un résultat spectaculaire : si on se déplace le long de l'axe de (Ω) au-delà de ($\mathcal{E}$), on observe en certains points des maximums de l'intensité, en d'autres des minimuns sensiblement nuls : l'ouverture (Ω) se comporte comme une lentille à plusieurs distances focales. Dans le domaine optique, cette expérience a puissamment étayé la validité du principe de Huyghens pour les ondes lumineuses, que Fresnel utilisait abondamment mais qui restait contesté (milieu du XIX^e siècle).

2° *Les phénomènes de diffraction à l'infini* (dite de Fraunhofer).

La source (S) et l'écran d'observation sont rejetés à l'infini : le faisceau parallèle incident (I), issu de la source ponctuelle (S) tombe sur l'écran ($\mathcal{E}$) percé de l'ouverture (Ω); un observateur à l'infini dans la direction (T) reçoit un faisceau sensiblement parallèle de rayons diffractés par l'ouverture (fig. 11.3).

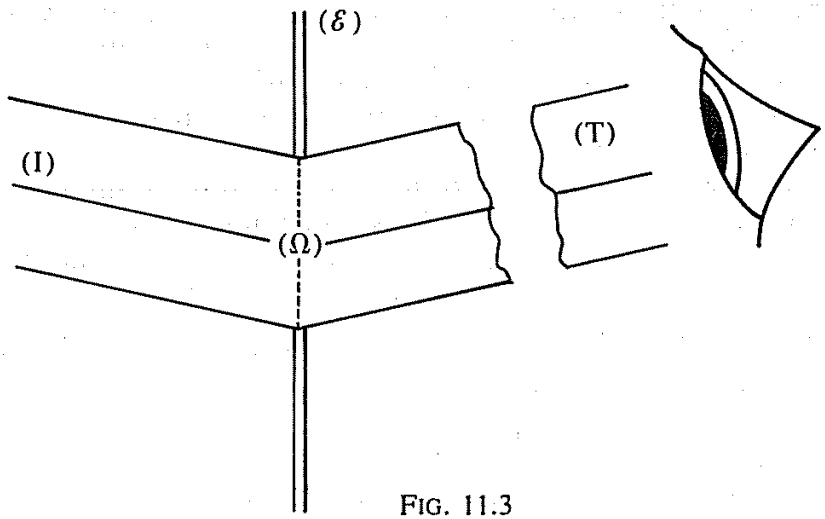


FIG. 11.3

Pour faciliter l'étude, on prend une source (S) monochromatique; on utilise de plus le dispositif équivalent représenté sur la figure 11.4 : la lentille (L_1) transforme le faisceau issu de (S) en un faisceau parallèle qui éclaire toute l'ouverture (Ω); on observe dans le plan focal (π) de (L_2) la figure de diffraction : en P_1 convergent les ondes diffractées par (Ω) dans la direction faisant l'angle θ_1 avec le faisceau incident.

2. DIFFRACTION A L'INFINI PAR UNE FENTE RECTANGULAIRE ÉTROITE ET TRÈS LONGUE

La figure 11.5 reprend et explicite la figure 11.4 dans le cas d'une fente *de largeur* (b) *très petite devant sa longueur* (l). En l'absence de fente (F) et d'écran ($\mathcal{E}$), le faisceau incident de rayons parallèles *monochromatiques* converge en P_0, foyer de (L_2). Interposons l'écran ($\mathcal{E}$) et sa fente (F) normalement à l'axe du système optique, entre (L_1) et (L_2) : les rayons

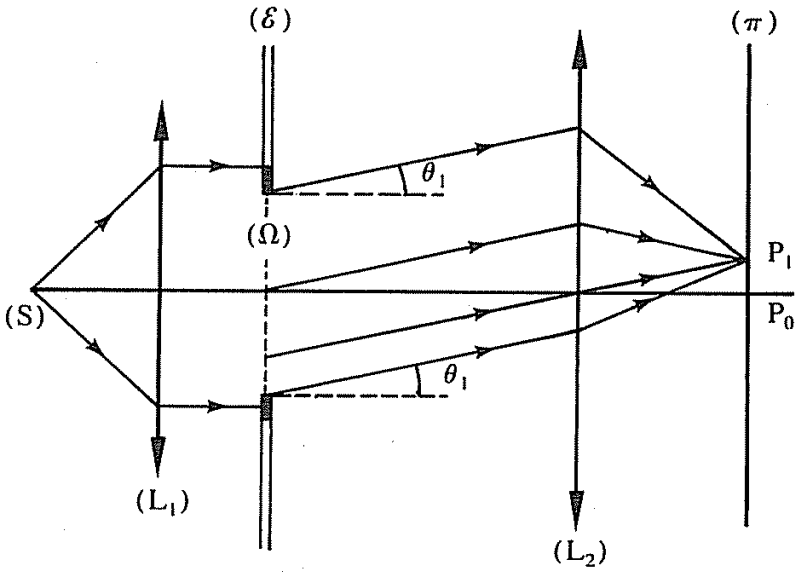


FIG. 11.4

diffractés par la fente (F), parallèlement à une direction donnée, convergent dans le plan focal image de (L_2), plan normal en P_0 à l'axe du système. On observe le phénomène sur l'écran (π) passant par P_0 et parallèle à ($\mathcal{E}$).

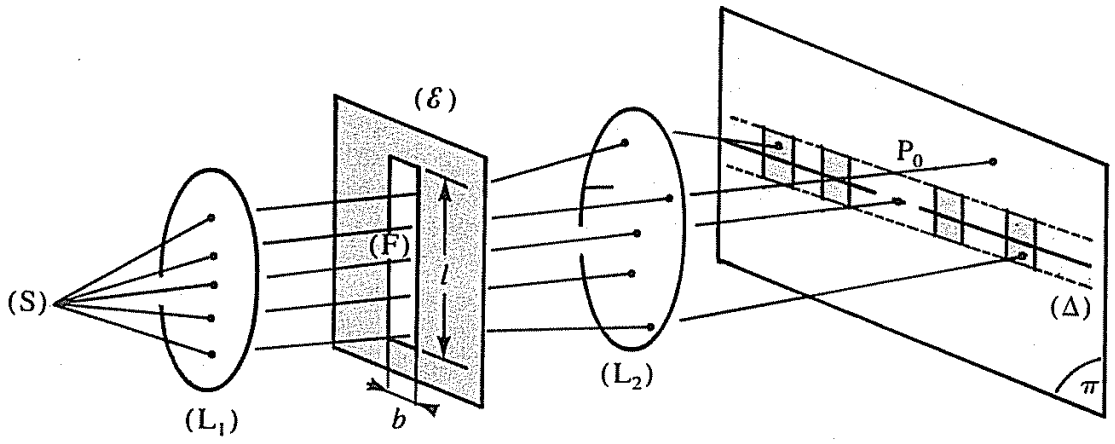


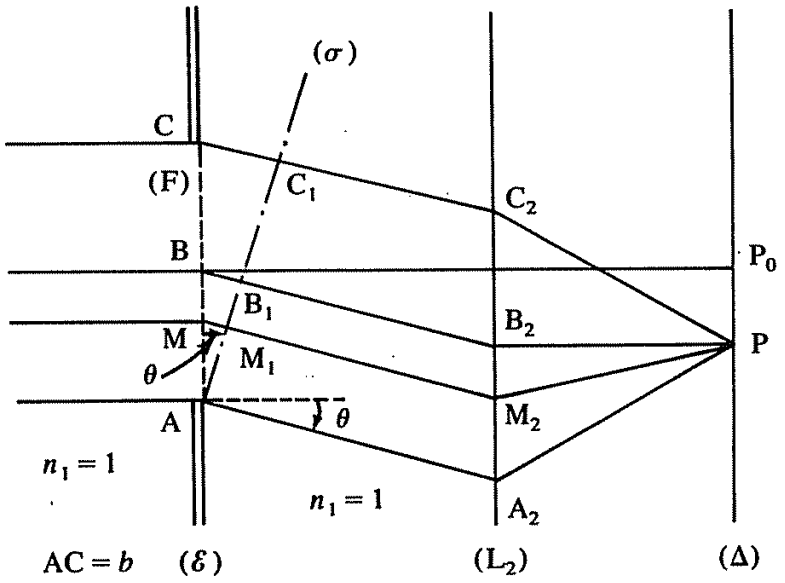
FIG. 11.5

Examinons ce qui se produit dans le plan (S, Δ), (Δ) étant la droite de (π) passant par P_0 et normale à la plus grande dimension de (F) (fig. 11.6). On se propose de calculer l'intensité de l'onde plane se propageant normalement au faisceau de rayons parallèles diffractés selon l'angle θ. La lentille (L_2) transforme cette onde plane en une onde sphérique convergent en P; entre le plan d'onde (σ) et le point P où convergent les ondes sphériques, toutes les ondes cheminant selon les chemins différents AA_2P, B_1B_2P, C_1C_2P subissent le même déphasage. Par suite, les différences de phase entre les points A, B, C, appartenant à l'onde plane incidente au niveau de la fente (F) (plan ABC), et le point P proviennent de leurs différences de chemin optique entre (F) et (σ) c'est-à-dire respectivement

0, BB_1, CC_1. Pour un point M de AC, tel que $AM = x$, $\delta = MM_1 = x \sin\theta$ et *le déphasage φ calculé par rapport au point* A, c'est-à-dire par rapport à l'onde incidente, vaut selon (9.10) :

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{x \sin\theta}{\lambda}, \quad \text{(puisque } n_1 = 1\text{)}.$$

FIG. 11.6



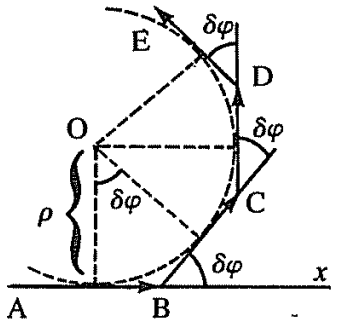
Ce déphasage est d'ailleurs le même pour tous les points d'un élément de fente, parallèle à la direction d'allongement de (F), c'est-à-dire normal en M au plan de la figure 11.6 et de largeur infinitésimale dx : cette remarque permet alors de regrouper les contributions à la diffraction de sources fictives parallèles, de largeur dx, de longueur L, la contribution $d\vec{\xi}$ de chaque source à l'onde $\vec{\xi}$ résultante étant proportionnelle à la largeur dx et sa phase valant $\varphi = 2\pi x \sin\theta/\lambda$.

Appliquons le principe de superposition à ces ondes d'amplitude $d\xi$ et de phase φ ; cela revient à additionner leurs vecteurs de Fresnel, de norme $d\xi$ et de phase φ ; entre deux vecteurs consécutifs la différence de phase vaut $\delta\varphi = \varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\, dx$; elle est constante pour une largeur dx déterminée. Si nous nous reportons à la figure 11.7a, nous voyons aisément que tous ces vecteurs, de même norme, et dont la phase croît avec un pas $\delta\varphi$ constant, sont tangents à un cercle de centre O et de rayon ρ. Ce cercle est tangent également au premier vecteur issu de A, de phase $\varphi = 0$ puisqu'il sert d'origine à la mesure de la différence de phase φ : ce même vecteur est donc confondu avec la direction Ax selon laquelle on mesure les phases et le centre O du cercle est alors sur $Ay \perp Ax$. Le vecteur résultant de la somme de Fresnel joint A à l'extrémité Q du dernier vecteur (fig. 11.7b) : c'est le vecteur $\overrightarrow{AQ}$. Appelons α l'angle formé par le premier vecteur issu de A et le dernier d'extrémité Q; α est la somme de tous les angles $\delta\varphi$:

$$\alpha = \Sigma\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta(\Sigma dx) = \frac{2\pi b \sin\theta}{\lambda},$$

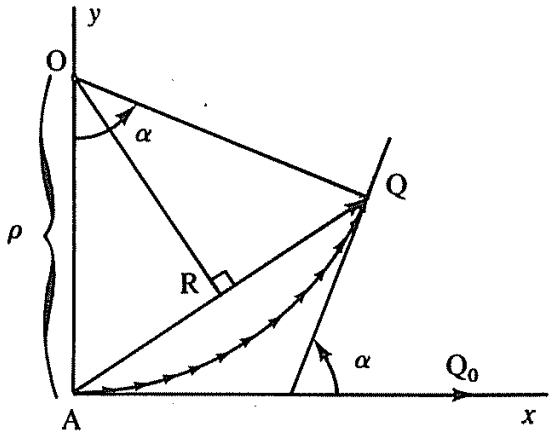
puisque la somme des largeurs dx des sources élémentaires doit donner la largeur de la fente-source, soit b. Également, d'après cette construction (fig. 11.7b), $\alpha = (OA, OQ)$, l'angle formé par les rayons perpendiculaires aux premier et dernier vecteurs; il en résulte que la norme de $\overrightarrow{AQ}$ vaut :

$$|AQ| = \xi = 2\rho \sin \alpha/2.$$



$AB = BC = CD = DE = d\xi$

(*a*)



(*b*)

FIG. 11.7

En conclusion :

> l'onde diffractée selon la direction θ a comme amplitude $\xi = 2\rho \sin \alpha/2$ et comme différence de phase par rapport à l'onde plane incidente tombant sur la fente de largeur b, $\alpha = 2\pi b \sin \theta/\lambda$.

En particulier, pour l'onde diffractée convergent en P_0, $\theta = 0$, $\alpha = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{AQ_0}$ est alors la somme de tous les vecteurs de norme $d\xi$ portés par Ox : sa norme ξ_0 représente aussi la longueur de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AQ}$ sous-tendu par l'angle α :

$$|AQ_0| = \xi_0 = \overset{\frown}{AQ} = \rho\alpha = 2\rho \frac{\alpha}{2}.$$

Le rapport des amplitudes de l'onde diffractée observée en P et en P_0 (fig. 11.6) est égal à :

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{2\rho \sin \alpha/2}{2\rho\alpha/2} = \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} = \frac{\sin u}{u},$$

en posant $u = \alpha/2$.

Le rapport des intensités observées en P et en P_0 étant égal au rapport des amplitudes au carré, on a enfin :

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}. \tag{11.1}$$

Les graphes des fonctions $y = \sin u/u$ et $y = (\sin u/u)^2$ sont portés sur les figures 11.8a et b; leurs caractéristiques essentielles sont que $\left(\frac{\sin u}{u}\right)_{u=0} = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2_{u=0} = 1$ et qu'elles s'annulent pour $u = \pm n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), c'est-à-dire pour $b \sin\theta/\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; l'oscillation centrale a donc une largeur double ($-1 \leqslant b \sin\theta/\lambda \leqslant +1$) de celle des autres oscillations.

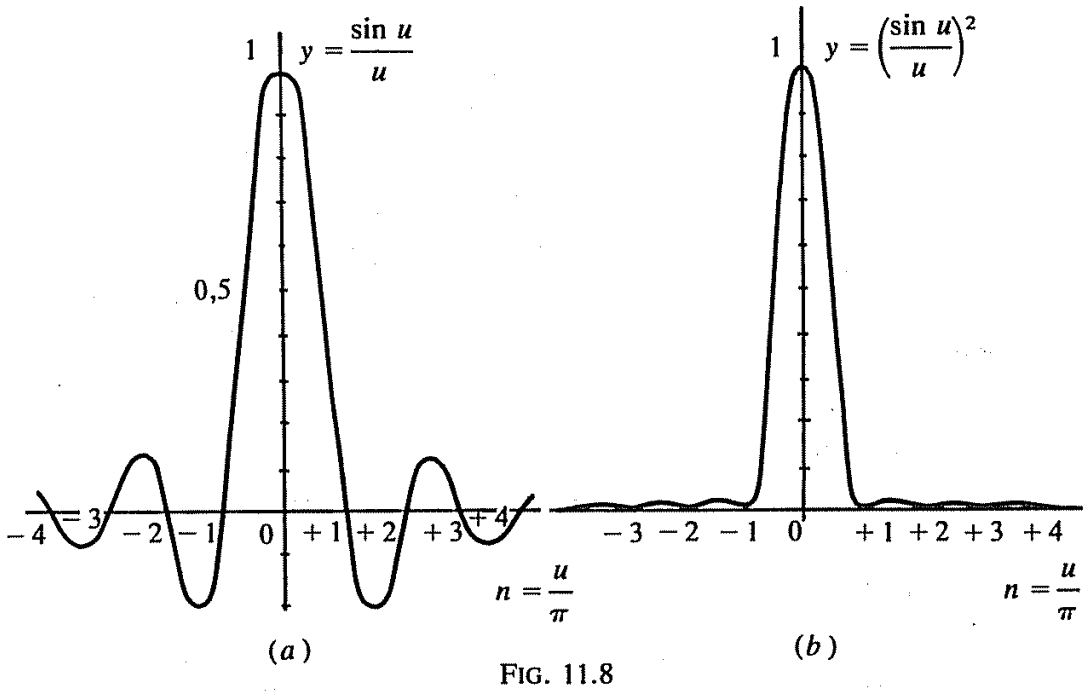


FIG. 11.8

L'éclairement de l'écran (π) *est maximal* ($I = I_0$) *en* P_0, *point où se forme l'image géométrique de la source* (S) *en l'absence de la fente* (F). Les minimums d'éclairement sont donnés pour les directions θ telles que $\sin\theta = n\lambda/b$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). La première frange brillante est deux fois plus large que celles qui l'entourent et les trois premiers maximums secondaires représentent respectivement 4,7 %, 1,7 % et 0,8 % de I_0 : I/I_0 est donc très petit au-delà de $u = \pi$, c'est-à-dire pour $\sin\theta > \lambda/b$. *Si b est très petit, la lumière est largement diffractée hors du voisinage immédiat de l'image géométrique de la fente.*

La lumière est diffractée dans la direction (Δ) perpendiculaire à la largeur de la fente parce que celle-ci est très faible. Il est donc logique d'admettre (et celà peut se démontrer) que l'effet de diffraction dans la direction parallèle à la fente sera pratiquement nul : la lumière sera donc concentrée selon (Δ) et distribuée comme indiqué ci-dessus (fig. 11.5 et 11.8b).

3. DIFFRACTION A L'INFINI PAR UNE PUPILLE CIRCULAIRE

Les calculs sont plus compliqués que dans le cas précédent et nous ne discuterons que les résultats, ceux-ci étant importants puisque, dans les instruments d'optique, les faisceaux lumineux sont souvent limités par des

diaphragmes circulaires ou pupilles, les lentilles elles-mêmes constituant de tels diaphragmes.

Si l'éclairement incident est normal au plan ($\mathcal{E}$) de la pupille (Ω), la figure de diffraction aura la symétrie de révolution de cette pupille, de diamètre b ; l'axe optique (Δ) sera orthogonal à l'écran ($\mathcal{E}$), à la lentille (L) et à l'écran récepteur (π) situé dans le plan focal-image de (L) (fig. 11.9).

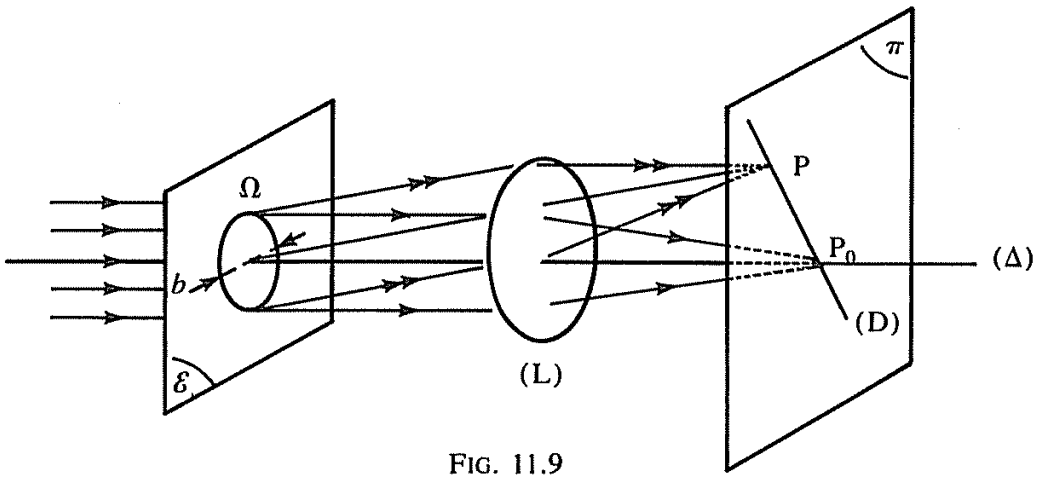


FIG. 11.9

On observe alors que le foyer principal P_0 est entouré de franges circulaires alternativement claires et sombres, l'éclairement le long d'un diamètre (D) de l'écran (π) ayant l'allure de la figure 11.10, connue sous le nom de *figure d'Airy*. L'essentiel de la lumière est contenue dans le disque central, les maximums des anneaux secondaires valant respectivement 1,75 %, 0,42 % et 0,16 % du maximum central.

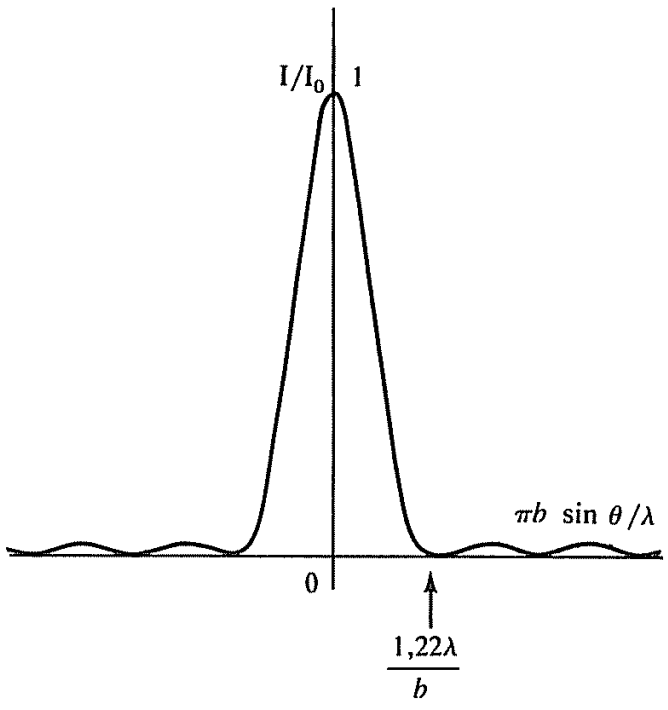


FIG. 11.10

La valeur de θ_0 correspondant au premier anneau sombre ($I/I_0 = 0$) est donné par la relation :

$$\theta_0 \# \sin \theta_0 = 1{,}22 \frac{\lambda}{b}, \tag{11.2}$$

résultat peu différent de celui trouvé dans le cas de la fente ($\sin \theta_0 = \lambda / b$).

Remarque : La figure de diffraction n'est pratiquement guère modifiée (fig. 11.11) si le faisceau incident est incliné légèrement d'un angle α par rapport à l'axe principal (Δ); l'image géométrique correspondante est P_1. On estime qu'on peut distinguer P_1 de P_0, et par suite les directions des faisceaux incidents, si l'angle α est au moins égal à θ_0, angle de diffraction du premier anneau sombre : nous pouvons ainsi définir le *pouvoir de résolution* de ce système optique par :

$$\alpha \geqslant \theta_0 = 1{,}22\lambda / b. \tag{11.3}$$

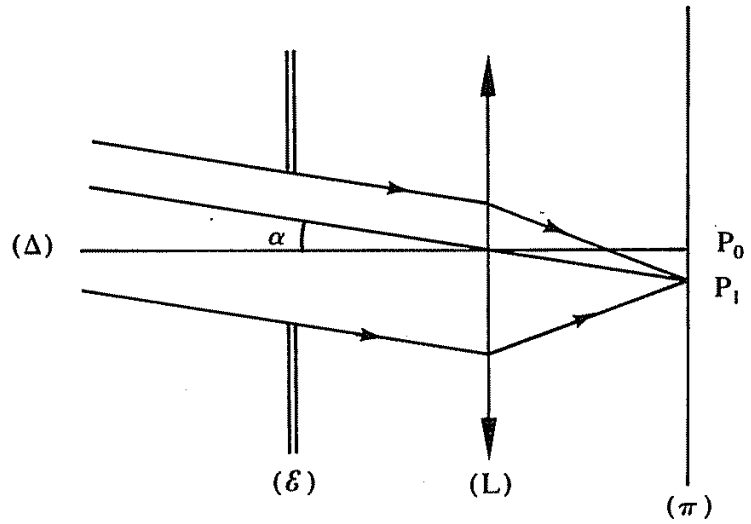


FIG. 11.11

Par exemple, si $b = 2{,}5$ mm, pour $\lambda = 0{,}5\ \mu$m, on trouve $\theta_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$ radian $\# 5''$: la diffraction limite donc bien la résolution angulaire de ce système.

Dans le cas du microscope, un calcul complet appliqué à son objectif conduit à la formule (10.25).

4. RÉSEAUX DE DIFFRACTION

Considérons N fentes parallèles identiques, de largeur b, équidistantes de a et très longues par rapport à a et b. Éclairons-les par un faisceau monochromatique de lumière parallèle, normal au plan ($\mathcal{E}$) des fentes. Chaque point des fentes devient un émetteur secondaire *d'ondes sphériques synchrones.*

Si on observe ce que l'on reçoit à grande distance de ($\mathcal{E}$) et sous l'angle θ (fig. 11.12), il faut tenir compte de la superposition de deux phénomènes :

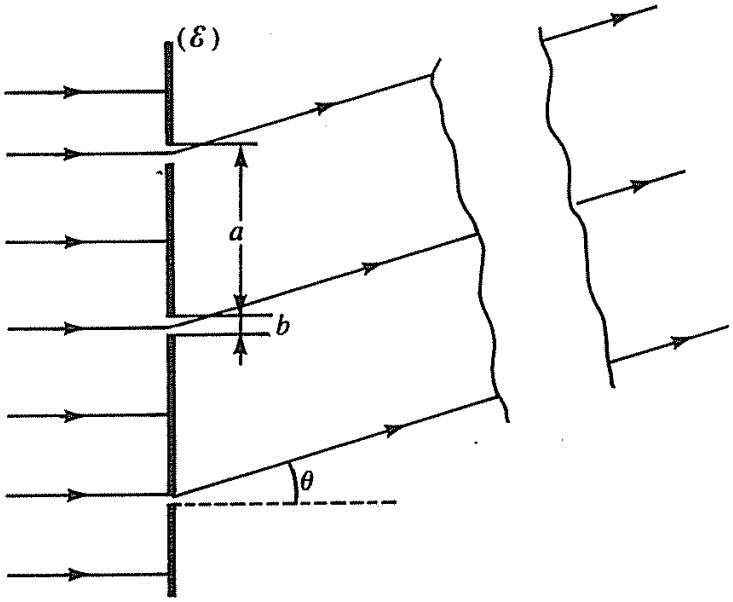


FIG. 11.12

— dans la direction θ, on observe la composition ou *interférence* de N sources synchrones d'intensité i, séparées consécutivement de a ;
— si b, largeur de chaque fente-source, est faible, la lumière émise par chaque fente a le comportement de la lumière *diffractée* par une fente (§ 2) et son intensité i dépend de θ, d'après la relation (11.1).

Dans le résultat du calcul d'interférence sous l'angle θ, on doit donc remplacer l'intensité lumineuse i d'une fente par $i(\theta)$ pour obtenir l'intensité lumineuse réellement recueillie dans la direction θ.

4.1 Interférence de N sources synchrones, distantes de a et d'intensité i

Entre deux rayons parallèles (fig. 11.12), le déphasage est encore donné par :

$$\varphi = 2\pi a \sin\theta/\lambda.$$

A grande distance, l'amplitude résultant de la superposition de toutes les amplitudes de N sources s'obtient par la construction de Fresnel : chaque vecteur a la même norme ξ_0, et le déphasage entre deux vecteurs consécutifs est donné par φ. Comme au paragraphe 2, on obtient un polygone régulier, à N côtés de longueur ξ_0, inscrit dans un cercle O et de rayon ρ (fig. 11.13). L'angle (OA, OQ), sous-tendant de O le vecteur résultant $\overrightarrow{AQ}$, vaut $\alpha = N\varphi$; quant à $|AQ|$, on le calcule par :

$$|AQ| = 2AR = 2\rho \sin(N\varphi/2);$$

de plus, dans le triangle OAB, on a $\xi_0 = AB = 2\rho \sin\varphi/2$; on obtient finalement pour la norme de $\overrightarrow{AQ}$:

$$|AQ| = \xi_0 \frac{\sin N\varphi/2}{\sin\varphi/2}.$$

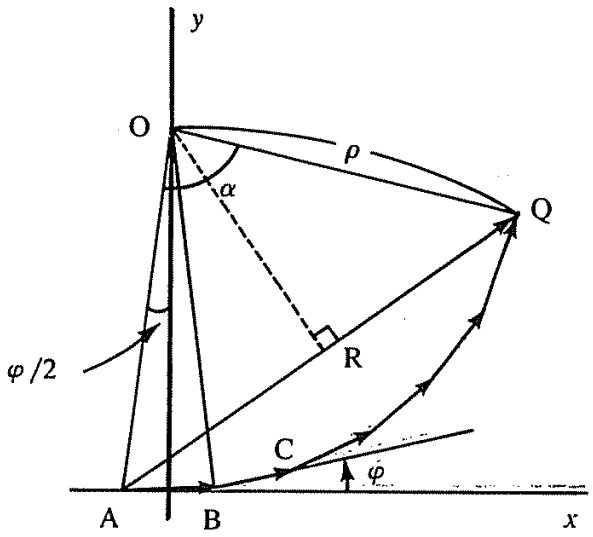


FIG. 11.13

L'intensité étant proportionnelle au carré des amplitudes, on a aussi :

$$I(\theta) = i\left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2, \tag{11.4}$$

i désignant l'intensité d'une source unique, $I(\theta)$ celle de l'interférence des N sources synchrones observées selon θ.

Dans l'hypothèse où i serait indépendante de θ, on peut aussi exprimer $I(\theta)$ en fonction de l'intensité $I_0 = I(0)$ recueillie normalement :

$$\theta = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \longrightarrow (\sin N\varphi/2)/(\sin \varphi/2) = N : I_0 = I(0) = N^2 i$$

d'où :

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{1}{N^2}\left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}.} \tag{11.5}$$

Le graphe de I/I_0 est représenté sur la figure 11.14 pour N = 2, 4, 8 et N très grand : la fonction possède un maximum très prononcé, égal à 1, pour $\varphi/2 = \pm n\pi$ (n entier) car $\sin(\pm n N\pi)/N \sin(\pm n\pi) = 1$. Cela est réalisé quand $\varphi/2 = \pm n\pi$, ou encore $\varphi = \pm n 2\pi$, c'est-à-dire, puisque $\varphi = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$, pour :

$$\boxed{a \sin\theta = n\lambda, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).} \tag{11.6}$$

Les ondes émises par deux sources successives sont alors déphasées d'un multiple de 2π ; leur interférence est bien constructive.

Quand N est très grand, le résultat essentiel est que l'intensité observée n'a de valeur appréciable que pour les directions θ très précises de l'espace satisfaisant à (11.6). Les valeurs entières prises par n sont appelées les *ordres d'interférence.*

4.2 Réseau de diffraction par transmission éclairé en incidence normale

Nous avons souligné que l'intensité i de l'onde diffractée par une fente de largeur b dépend en fait de θ selon (11.1) :

$$i(\theta) = i_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \quad u = \pi b \sin\theta/\lambda,$$

i_0 étant égale à $i(0)$. Introduisons cette expression dans (11.4); elle devient :

$$I(\theta) = i_0 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2,$$

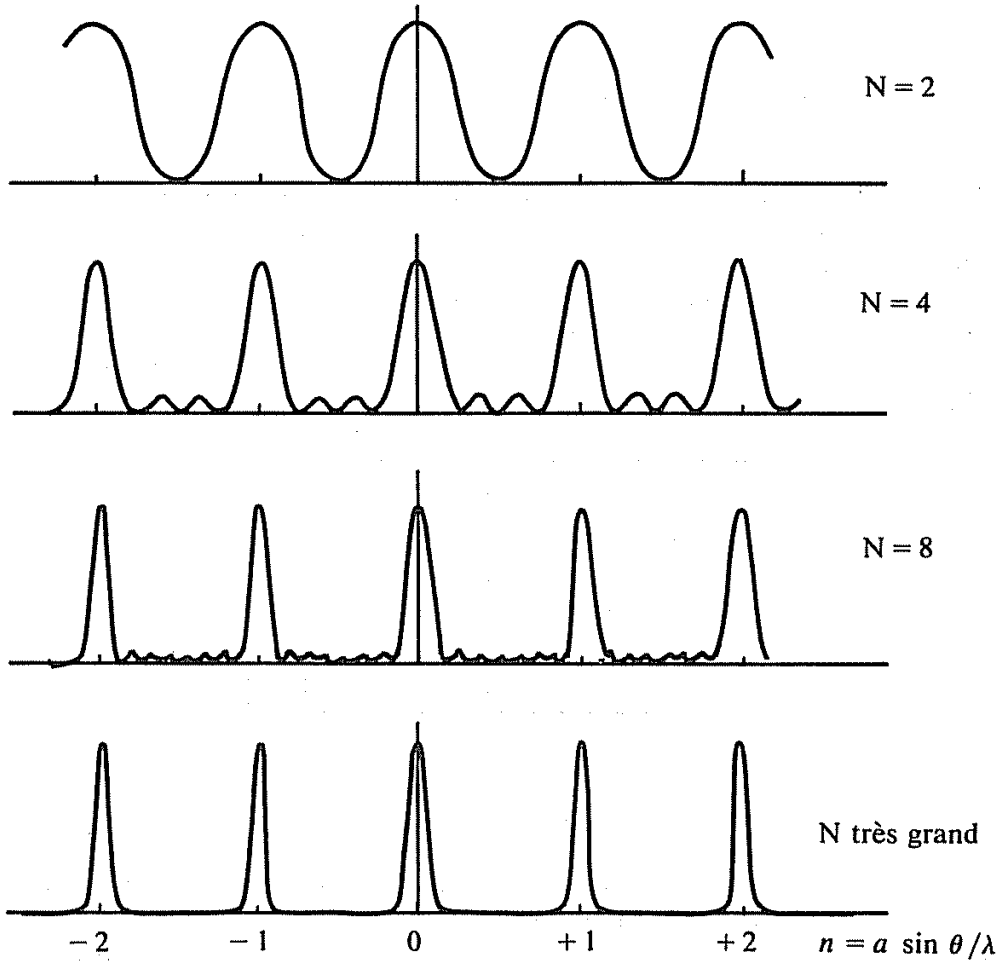


FIG. 11.14

et $I(0) = I_0 = N^2 i_0$, d'où finalement :

$$\boxed{\frac{I(0)}{I_0} = \frac{1}{N^2}\left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \quad \text{avec } \varphi/2 = \pi a \sin\theta/\lambda, \quad u = \pi b \sin\theta/\lambda.} \qquad (11.7)$$

Les conclusions du paragraphe précédent restent valables : quand N est très grand, l'intensité observée n'a de valeurs appréciables que pour $\varphi/2 = \pm n\pi$, c'est-à-dire $a \sin\theta = n\lambda$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$) mais la valeur du rapport I/I_0 n'est plus égale à l'unité puisque modulée par la fonction de diffraction $(\sin u/u)^2$. Cela apparaît très nettement sur la figure 11.15.

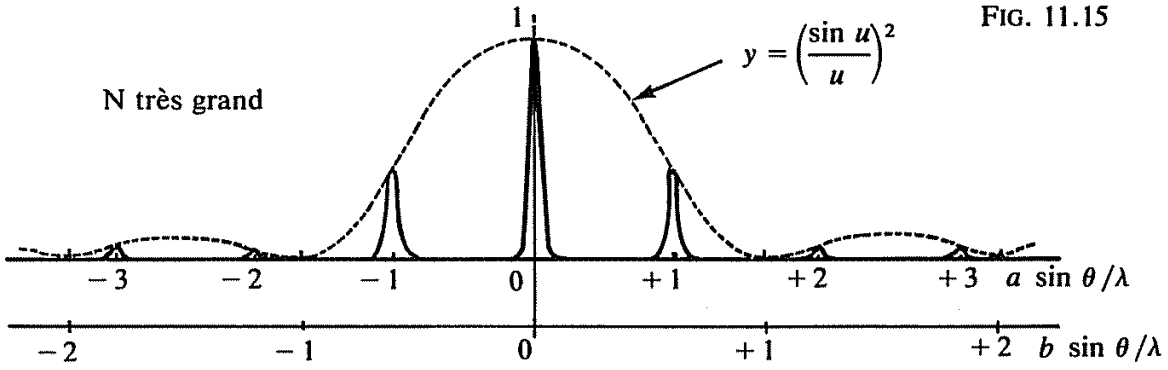


FIG. 11.15

Pour obtenir ce phénomène, il suffit de prendre une lame de verre polie sur ses deux faces. On grave sur l'une d'elle avec un burin à diamant des rainures rectilignes très serrées (quelques centaines de traits au millimètre) et équi-espacés : les parties gravées, distantes de a, sont opaques à la lumière; chaque région transparente entre deux rainures se comporte comme une fente rectangulaire allongée de largeur b (fig. 11.16). Le même résultat peut aussi être obtenu par technique photographique.

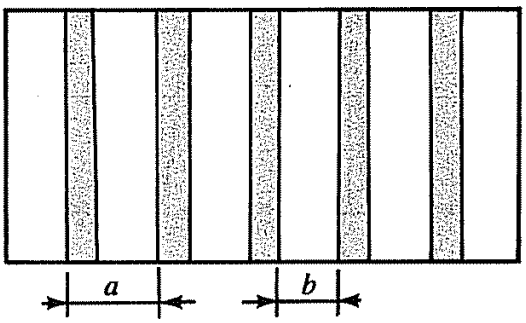


FIG. 11.16

L'observation de la figure d'interférence se fait comme sur la figure 11.11 : on éclaire normalement le *réseau* ci-dessus et après avoir concentré les rayons lumineux qui en émergent, grâce à une lentille (L), l'observation s'effectue dans le plan focal image de (L).

4.3 Propriétés des réseaux

Éclairons maintenant ce réseau par un *rayonnement polychromatique :* chaque radiation monochromatique, de longueur d'onde λ, qui le constitue est diffractée dans des rayons de l'espace dont les directions θ obéissent à (11.6). Par suite, *un réseau disperse la lumière* et permet l'analyse spectrale de rayonnements complexes : cette remarque justifie le fait que les réseaux soient des pièces essentielles des *spectrographes* que l'on utilise pour l'étude des rayonnements X mous, ultraviolet, visible et infrarouge.

Les réseaux décrits ici opèrent par *transmission;* en général, ils travaillent par *réflexion* et le rayonnement incident n'est pas nécessairement normal au plan du réseau. Un inconvénient majeur des réseaux est l'existence de plusieurs ordres d'interférence : ainsi un rayonnement de longueur d'onde $\lambda/2$ observée dans l'ordre $n = 2$ se comporte comme un rayonnement de longueur d'onde λ observé dans l'ordre 1. Pour éliminer

cette superposition, on taille de manière appropriée les réseaux *(réseaux blazés) :* l'énergie diffractée peut ainsi être concentrée dans tel ou tel ordre au détriment des autres.

Les réseaux modernes sont fréquemment des répliques plastiques d'un original gravé. Mais, de plus en plus, la gravure ne s'effectue pas par voie mécanique : on réalise, grâce à un laser (source intense de lumière monochromatique et cohérente), une figure d'interférence — appelée hologramme — enregistrée sur une résine photosensible qui subit ensuite une attaque chimique.

Un paramètre important d'un réseau est sa *dispersion angulaire* D définie par la variation $d\theta$ de l'angle θ correspondant à la variation $d\lambda$ de la longueur d'onde λ :

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{a} \longrightarrow \cos\theta\, d\theta = \frac{n}{a}\, d\lambda,$$

soit :

$$\boxed{D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \theta'_\lambda = n/a\, \cos\theta.} \qquad (11.8)$$

La séparation $d\theta$, pour une direction θ donnée d'observation de deux figures de diffraction d'onde monochromatique λ et $\lambda + d\lambda$, est donc proportionnelle à $d\lambda$. On peut définir le *pouvoir de résolution* d'un réseau par le rapport $R = \lambda/d\lambda$; on montre alors que :

$$\boxed{R = \lambda/d\lambda = Nn,} \qquad (11.9)$$

et ce pouvoir de résolution doit évidemment être aussi élevé que possible dans un spectrographe de qualité.

Exemple : Un réseau possède 20 000 traits pour une longueur de 5 cm; on en déduit $a = 5 \cdot 10^{-2}/20\,000 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ m, distance entre deux traits du réseau.
Éclairons-le en incidence normale avec la lumière jaune du sodium; celle-ci contient les deux radiations : $\lambda_1 = 0{,}589\,0\ \mu$m, $\lambda_2 = 0{,}589\,6\ \mu$m : la séparation $\Delta\lambda$ vaut donc par suite $\Delta\lambda = (0{,}589\,6 - 0{,}589\,0)\mu$m $= 6$ nm. Si on observe ce spectre dans le premier ordre ($n = 1$), la résolution R du réseau vaut : $R = N = 20\,000$; Il peut résoudre deux raies séparées de $\Delta\lambda' = \lambda/R$, soit, dans le cas présent, $\Delta\lambda' = 589\,3/20\,000 = 0{,}29$ nm c'est-à-dire un intervalle de longueur d'onde de vingt fois inférieur à la largeur $\Delta\lambda$ des raies du sodium : ces deux raies seront donc totalement séparées.

Le principe des réseaux — interférence entre un grand nombre d'ondes — est utilisé dans d'autres domaines spectraux, ondes radio et ondes acoustiques. En se reportant à la figure 11.12, dans laquelle on renverse le sens de propagation, et si on suppose que les fentes sont des antennes couplées à des récepteurs radio, on conçoit aisément que les

ondes n'interfèrent constructivement que si les déphasages sont un multiple de 2π : le dispositif ne pourra recevoir que les ondes provenant de directions bien définies de l'espace; les radiotélescopes à antennes multiples sont construits sur ce principe.

En ondes radio comme en acoustique, il est assez facile de réaliser des sources synchrones relativement puissantes et de déphasages réglables; si on substitue ces sources aux fentes de la figure 11.12, l'onde émise n'aura une intensité appréciable que dans certaines directions; on peut donc ainsi faire varier la direction d'émission (et de réception) d'une antenne multiple fixe. Ce principe est utilisé dans les radars (ondes radio) et en acoustique (ultrasons).

ANNEXE MATHÉMATIQUE

1. FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

1.1 Définitions des fonctions trigonométriques

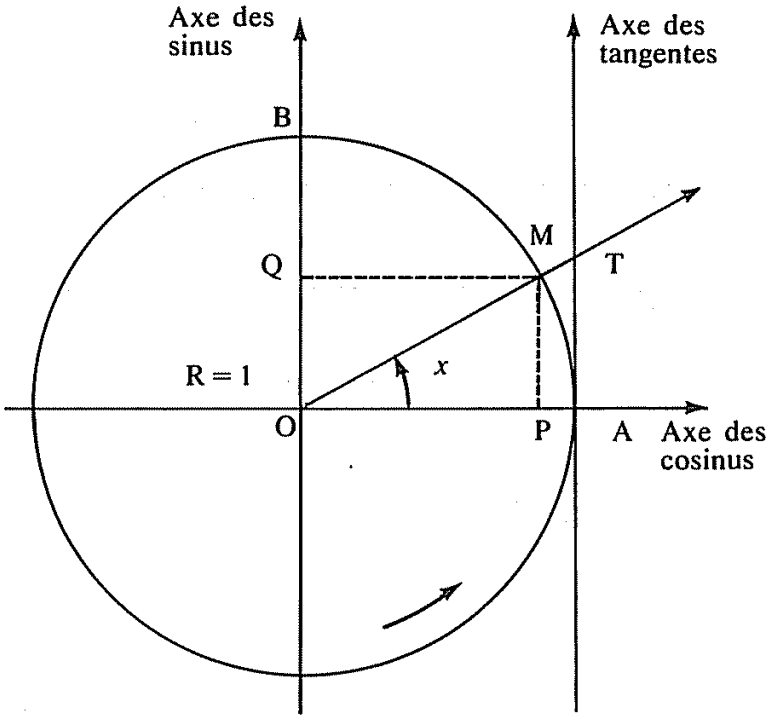


FIG. 1

Par définition, si $x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ (fig. 1), on a :

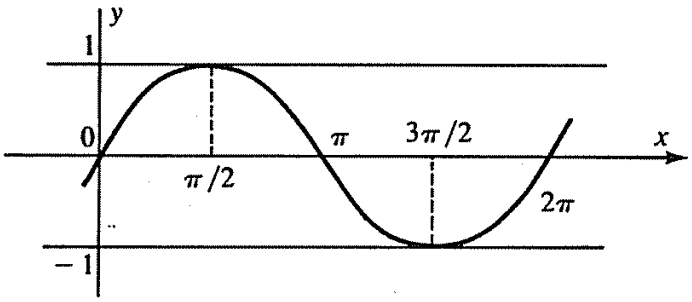
$$\sin x = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \overline{OQ};$$

$$\cos x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \overline{OP};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \overline{AT};$$

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

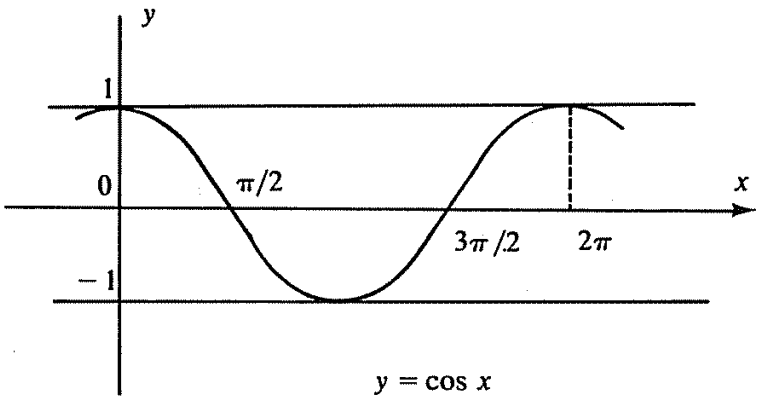
$$|OA| = |OB| = R = 1.$$



$y = \sin x$

périodicité : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

FIG. 2



$y = \cos x$

périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Fig. 3

Les graphes des fonctions $y = \sin x$, $y = \cos x$ et $y = \operatorname{tg} x$ sont dessinés respectivement sur les figures 2, 3 et 4.

1.2. Relations entre les fonctions trigonométriques d'un angle x.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

1.3 Fonctions trigonométriques de quelques angles

angles (en radians)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$
angles (en degrés)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	0

1.4 Relations entre les fonctions trigonométriques de certains angles liés par une relation simple

x et $(-x)$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\cot(-x) = -\cot x$
x et $(\pi + x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$
x et $(\pi - x)$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$
x et $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$
x et $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$

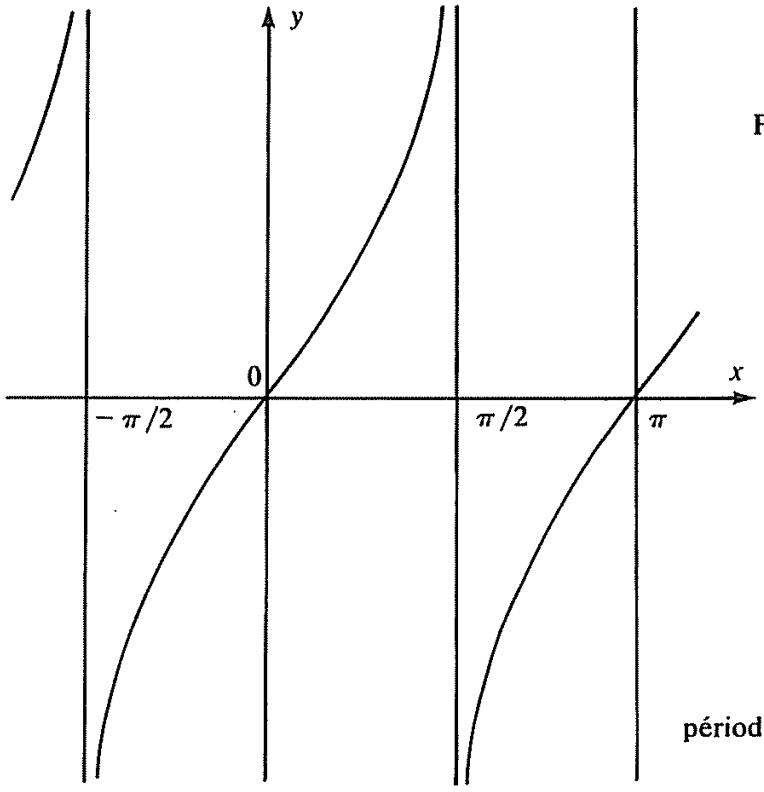


FIG. 4

$y = \operatorname{tg} x$

périodicité : $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

1.5 Formules pour l'addition et la soustraction des angles

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$	$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

1.6 Formules de la division des angles

$\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$	$\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$	$\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

1.7 Transformations trigonométriques

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cos \dfrac{x \mp y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$	$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

2. EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

2.1 Définition de *e*

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,8\ldots$$

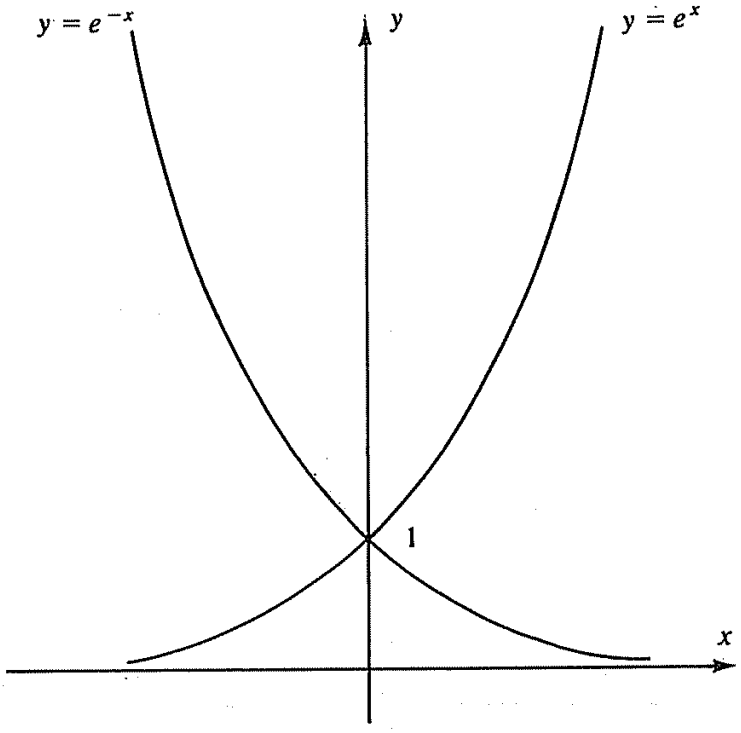


FIG. 5

Les graphes des fonctions $y = e^x$ et $y = e^{-x}$ sont donnés sur la figure 5.

2.2 Définitions des fonctions hyperboliques

$\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\text{th } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

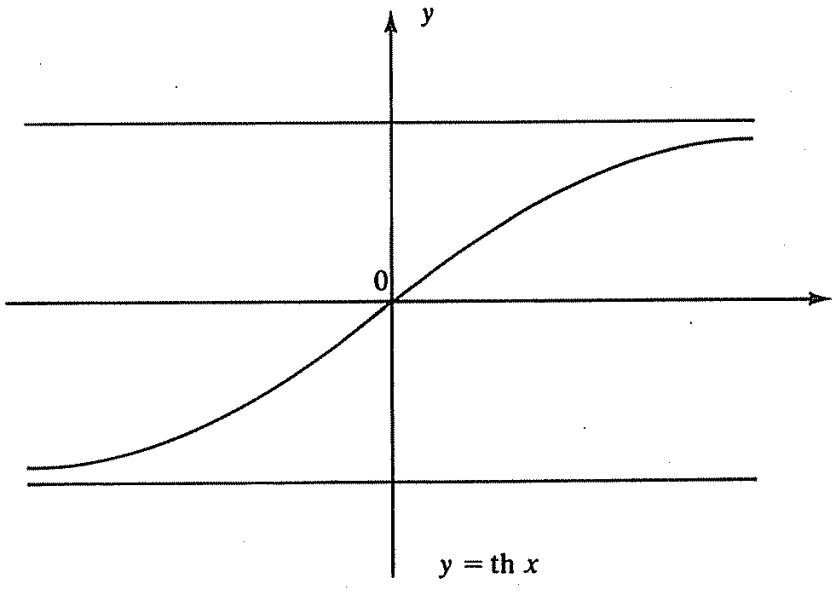


FIG. 6

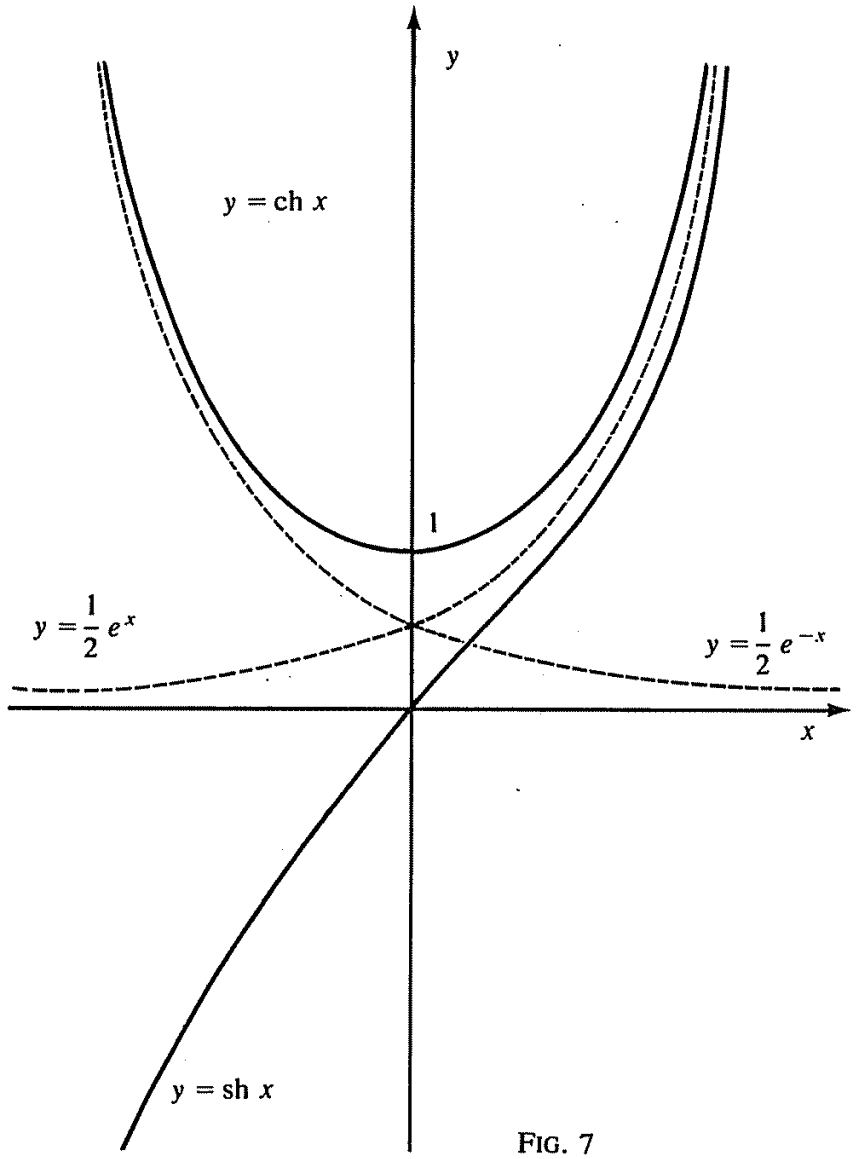


FIG. 7

Les graphes des fonctions sh x, ch x et th x sont dessinés sur les figures 6 et 7.

2.3 Logarithmes

— Logarithme naturel ou népérien, de base e (fig. 8) :

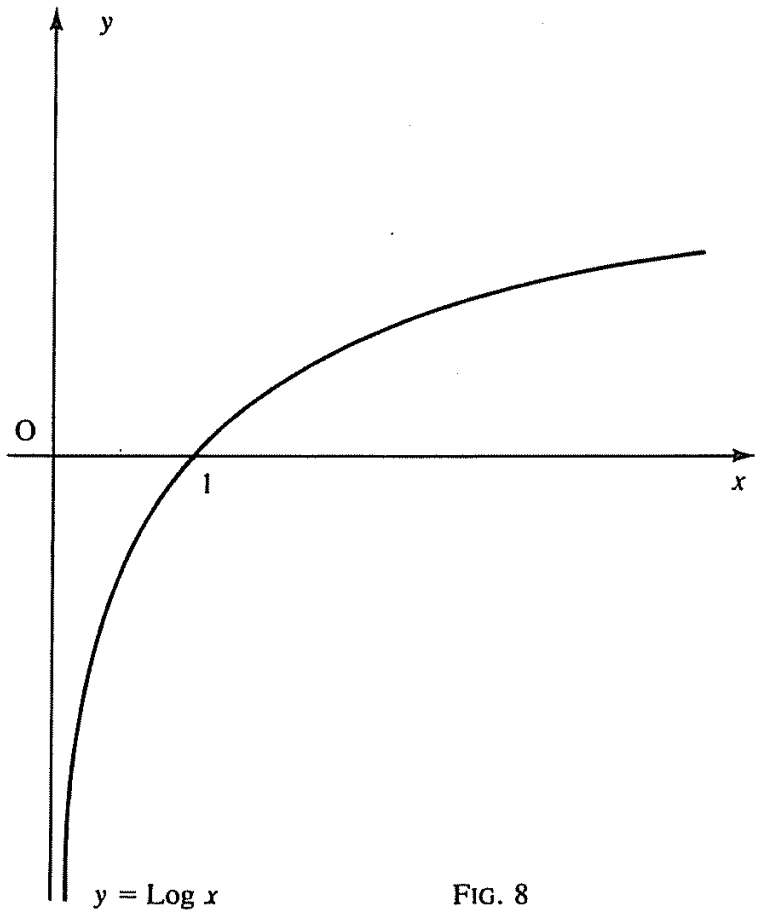
$$y = \text{Log } x \quad \text{si} \quad x = e^y.$$

— Logarithme décimal, de base 10 :

$$y = \log x \quad \text{si} \quad x = 10^y.$$

— Les logarithmes naturels ou décimaux sont liés par :

$$\text{Log } x = 2{,}303 \log x,$$
$$\log x = 0{,}434 \text{ Log } x.$$



$y = \text{Log } x$ FIG. 8

3. SÉRIE DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Soit h un accroissement de la variable x. La valeur que prend la fonction $f(x)$ en $x + h$ est donnée par la série de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

$$(n! = n(n-1)\ldots 3.2.1).$$

Il en découle les développements limités ci-dessous :

$$(1+x)^n \# 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2, \quad (|x| < 1);$$

$$e^x \# 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$\text{Log}(1+x) \# x - \frac{1}{2} x^2, \quad (|x| < 1);$$

$$\sin x \# x - \frac{x^3}{6}; \quad \cos x \# 1 - \frac{x^2}{2}; \quad \text{tg } x \# x + \frac{x^3}{3};$$

(dans les relations trigonométriques, x doit être exprimé en radians).

4. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

$f(u)$ étant une fonction de la variable u, elle-même *éventuellement* fonction de la variable x, on aura :

Fonction $f(u)$	Dérivée de $f(u)$ *par rapport à x :* $f'_x(u) = f'_u(u)\,u'_x$	Primitive de $f(u)$ *par rapport à u :* $F(u) = \int f(u)\,du + C^{te}$
u^n	$nu^{n-1}u'_x$	$u^{n+1}/(n+1) + C^{te}$, $(n \neq -1)$
u^{-1}	$(-1/u^2)\,u'_x$	$\text{Log}\ u + C^{te}$
$\text{Log}\ u$	$(1/u)\,u'_x$	$u\ \text{Log}\ u - u + C^{te}$
e^u	$e^u u'_x$	$e^u + C^{te}$
$\sin u$	$(\cos u)\,u'_x$	$-\cos u + C^{te}$
$\cos u$	$(-\sin u)\,u'_x$	$\sin u + C^{te}$
$\text{tg}\ u$	$(1/\cos^2 u)\,u'_x$	$-\text{Log}\ \lvert\cos u\rvert + C^{te}$

Remarque. Dans certains ouvrages, on trouve l'écriture : $\dfrac{df}{dx}$ pour f'_x, $\dfrac{d^2f}{du^2}$ pour f''_u; conformément aux recommandations des mathématiciens, nous éviterons ce type de notation pour les fonctions dérivées.

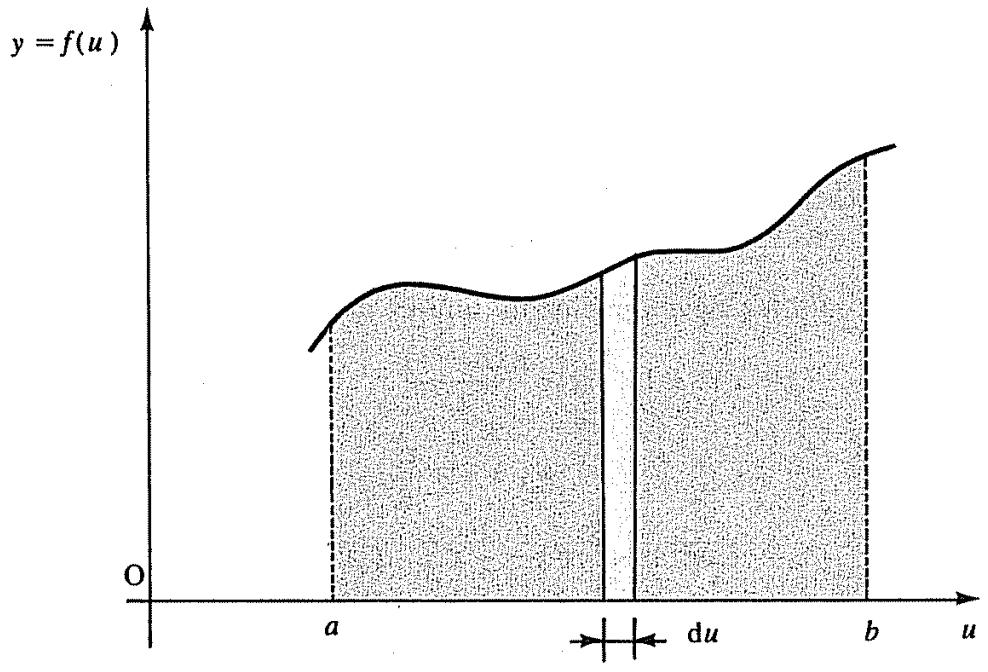


FIG. 9

5. INTÉGRALE DÉFINIE SUR (*a*, *b*)

Si $F(u)$ est la primitive de $f(u)$, c'est-à-dire si :

$$F(u) = \int f(u)\,du \quad \text{ou} \quad F'(u) = f(u),$$

alors la valeur de l'intégrale définie de $f(u)$ sur (a, b) est :

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du.}$$

Sur la figure 9, il apparaît évident que cette intégrale définie mesure l'aire algébrique de la surface comprise entre la courbe $f(u)$, l'axe des u et les deux droites $u = a$, $u = b$.

6. DÉRIVÉES PARTIELLES

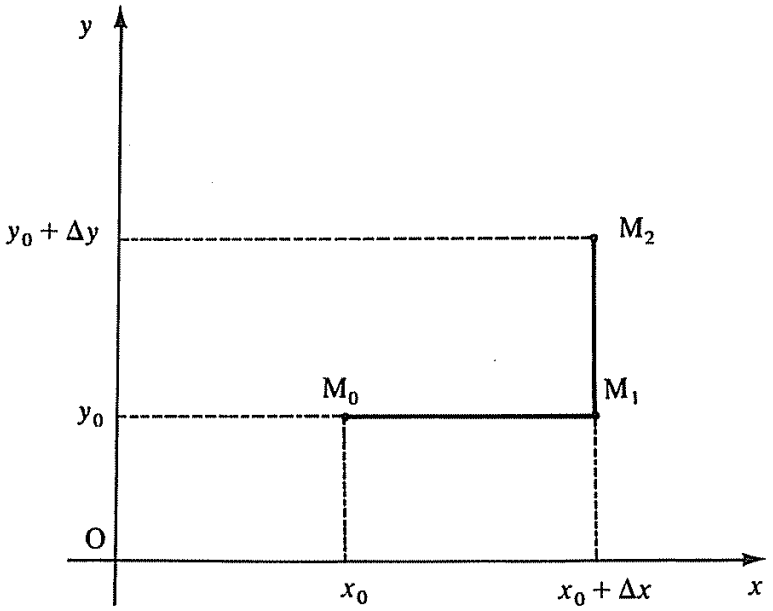


FIG. 10

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. Au point $M_0(x_0, y_0)$, f prend la valeur $f(x_0, y_0)$. Déplaçons-nous à partir de M_0 en maintenant la coordonnée y constante et égale à y_0 (fig. 10), tandis que x subit un accroissement Δx ; f varie de :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Alors si f est dérivable pour $x = x_0$, nous appellerons sa dérivée, *dérivée partielle* de f par rapport à x en M_0, et nous la noterons :

$$(\partial f / \partial x)_{x_0, y_0}.$$

On aura donc :

$$\boxed{(\partial f / \partial x)_{x_0, y_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.}$$

De même, la dérivée partielle de f par rapport à y en M_0 sera :

$$\boxed{(\partial f/\partial y)_{x_0,\,y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta y}.}$$

Pour chaque opération de dérivation partielle, f est considérée comme une fonction d'une *seule* variable; la généralisation à une fonction de plus de deux variables est évidente.

Une propriété importante de la dérivation d'une fonction de plusieurs variables est la *commutativité des dérivations partielles successives* de cette fonction; par exemple :

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{x_0,\,y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)_{x_0,\,y_0}.$$

7. DIFFÉRENTIELLE ET FORME DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

7.1 Différentielle

Reprenons la fonction $f(x, y)$ du paragraphe 6. Amenons M de M_0 en $M_1(x_0 + \Delta x, y_0)$ puis en $M_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (fig. 10); f subit l'accroissement total :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

que l'on peut écrire :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

en mettant en évidence les accroissements le long de M_0M_1 et de M_1M_2. On peut aussi écrire :

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,\,y_0} \Delta x + \varepsilon_x(\Delta x)\,\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0,\,y_0} \Delta y + \varepsilon_y(\Delta y)\,\Delta y,$$

où $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont les dérivées partielles de $f(x, y)$ par rapport à x et y, calculées en (x_0, y_0), et ε_x, ε_y, deux fonctions qui tendent vers zéro en même temps que Δx et Δy.

A la limite, pour des déplacements infiniment petits du premier ordre, au voisinage d'un point (x, y) quelconque, on aura :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y.}$$

$\mathrm{d}f$, limite de Δf, est par *définition,* la *différentielle* de $f(x, y)$. L'indice y associé à $\partial f/\partial x$, rappelle qu'au cours de la dérivation par rapport à x, y reste constant; souvent cet indice n'est pas noté.

7.2 Forme différentielle

Soit A et B deux fonctions *quelconques* de x et y. On écrit l'expression :

$$đg = \mathrm{A}(x, y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{B}(x, y)\,\mathrm{d}y;$$

$đg$ est appelée *forme différentielle.*

 BeatriceGloria_personal library

Si les fonctions A et B vérifient :

$$A(x, y) = (\partial f/\partial x)_y, \quad B(x, y) = (\partial f/\partial y)_x,$$

on a : $$đg = df.$$

La forme différentielle $đg$ est alors la différentielle df. Nous avons utilisé dans ce cours les notations dg pour une différentielle, et $đg$ pour une forme différentielle.

On peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $đg$ soit une différentielle est que :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y.$$

7.3 Relations entre les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables

Soit $f(x, y, z) = 0$ une relation entre les variables x, y et z. La différentielle de x, considérée comme une fonction de y et z, s'écrit :

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz.$$

De même, on peut écrire :

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz.$$

Substituons dy, ainsi obtenu, dans la première différentielle :

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz\right] + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz,$$

soit :

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz.$$

Si nous considérons que x et z sont les variables indépendantes, cette relation doit être vraie pour toutes les valeurs de dx et dz. Ainsi, si $dz = 0$, $dx \neq 0$, il en résulte :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1,$$

ou :

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{(\partial y/\partial x)_z};}$$

si $dx = 0$, $dz \neq 0$, il vient :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{-1}{(\partial z/\partial x)_y},$$

soit :

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.}$$

Remarque. Si z était fonction de y, y étant fonction de x, on aurait :

$$z'_x = z'_y(y) \times y'_x(x).$$

On a ici :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z.$$

PHYSIQUE GÉNÉRALE 2
thermodynamique
optique

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Chocs et théorie cinétique des gaz 1

Chocs

1. Généralités 1

2. Chocs et lois de conservation. Les bilans 3

3. Exemples de chocs élastiques 4
3.1. Le choc de plein fouet 4
3.2. Choc oblique sur une paroi 5

4. Exemples de chocs inélastiques 6

Théorie cinétique du gaz parfait

5. Le modèle microscopique du gaz parfait 7

6. Distribution spatiale des vitesses moléculaires et vitesse quadratique moyenne 8

7. Calcul de la pression 9

8. Conséquences 10

Chapitre 2. Thermométrie et échelles de température. Le gaz parfait 12

1. Introduction 12

Thermométrie et échelles de température

2. La température, grandeur mesurable 12
2.1. Principes 12
2.2. Exemples de thermomètres 14

3. Les échelles de référence 16
3.1. L'échelle centésimale à deux repères ou échelle Celsius 16
3.2. L'échelle à un seul repère : température Kelvin ou absolue 17
3.3. Détails expérimentaux. Étalons primaire et secondaire 17

Le gaz parfait

4. Les propriétés du gaz parfait 19
4.1. A température constante 19
4.2. A pression constante 20
4.3. A volume constant 20

5. Équation d'état du gaz parfait 21

6. Loi de Dalton 22

7. Signification microscopique de la température absolue 23

Chapitre 3. Systèmes thermomécaniques et premier principe de la thermodynamique

25

1. Chaleur et puissance dissipée par les forces ne dérivant pas de potentiels. Expérience de Joule 25

2. Transferts de chaleur 27
2.1. Transfert par conduction 27
2.2. Transfert par convection 29
2.3. Transfert par rayonnement 29

3. Systèmes thermomécaniques 30
3.1. Caractéristiques d'un système thermomécanique 30
3.2. Variables thermomécaniques et états d'un système 30
3.3. Équations d'état et variables thermomécaniques indépendantes 31
3.4. Transformations quasi-statiques 31
3.5. Réversibilité et irréversibilité 32
3.6. Transformations monotherme, isotherme, adiabatique, isobare et isochore 33
3.7. Cycles 34

4. Convention de signes. Échanges énergétiques élémentaires 35
4.1. La convention de signes des physiciens 35
4.2. Travaux élémentaires 35
4.3. Quantités de chaleurs élémentaires 38

5. Le premier principe de la thermodynamique ou principe d'équivalence 39

Chapitre 4. Les applications du premier principe 41

Résultats généraux

1. L'énergie interne. Le principe de l'état initial et de l'état final 41

2. Transformations isobares et enthalpie 43

3. Transformations isochores et énergie interne 44

4. Calorimétrie 45
4.1. Définitions 45
4.2. Postulat de la calorimétrie 46
4.3. Chaleurs massiques des gaz 46
4.4. Chaleurs massiques des phases condensées (liquides et solides) 47

Le gaz parfait

5. Loi de Joule et relation de Mayer 48

6. Applications aux chaleurs de réactions 50

7. Transformations isothermes 51

8. Transformations adiabatiques 52
8.1. Transformations réversibles 52
8.2. Diagramme de Clapeyron d'une isotherme et d'une adiabatique 53

9. Transformations quelconques 54
9.1. Formule générale 54
9.2. Application aux transformations isobares 55
9.3. Application aux transformations isochores 55

10. Théorie cinétique et chaleurs massiques molaires du gaz parfait 55

11. L'équipartition de l'énergie et ses conséquences 56
11.1. Le gaz parfait monoatomique 56
11.2. Le gaz parfait diatomique 57
11.3. Loi de Dulong et Petit 59

Chapitre 5. Second principe de la thermodynamique et entropie 60

1. Les énoncés du second principe de la thermodynamique 60
1.1. Principe d'évolution 60
1.2. Énoncé de Thomson (Kelvin) 61
1.3. Énoncé de Clausius 61
1.4. Principe de Carnot 62

2. Cycles de Carnot. Rendements. Théorème de Carnot 66
2.1. Cas d'un moteur thermique 66
2.2. Cas d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur 69

3. L'entropie 71
3.1. Cycles réversibles à plus de deux sources de chaleur 71
3.2. Introduction de la notion d'entropie 73
3.3. Expressions de l'entropie du gaz parfait 74

4. Entropie et transformations irréversibles. Inégalité de Clausius 75
4.1. Transformations irréversibles et inégalité de Clausius 75
4.2. Retour sur le théorème de Carnot 76
4.3. Entropie et inégalité de Clausius 77

5. Exemples de calcul de variations d'entropie 78

Chapitre 6. Changements d'état d'un corps pur 79

1. Réseau d'isothermes. Changement d'état gaz-liquide 79
1.1. Les faits expérimentaux 79
1.2. L'état fluide 81
1.3. Représentation (T, p) et courbe de vaporisation 82

2. Changements d'état fluide-solide 83

3. Transformations infinitésimales d'un corps pur et coefficients thermomécaniques 85
3.1. Coefficient de dilatation isobare 86
3.2. Coefficient de dilatation isochore 86
3.3. Coefficient de compressibilité isotherme 87
3.4. Exemples d'utilisation des coefficients thermomécaniques 87
3.5. Ordres de grandeur des coefficients thermomécaniques 88

4. Transformations infinitésimales d'un corps pur et principes de la thermodynamique 88
4.1. Travail et chaleur dans une transformation infinitésimale 88
4.2. Variations élémentaires de l'énergie interne et de l'entropie associées à une transformation infinitésimale d'un corps pur. Conséquences 89

5. Chaleurs latentes et formule de Clapeyron 90
5.1. Chaleurs latentes de changements d'état 90
5.2. Signes et ordres de grandeurs des chaleurs latentes 90
5.3. La formule de Clapeyron 91
5.4. Conséquences de la formule de Clapeyron 92

Chapitre 7. Phénomènes de transport 94

1. Généralités 94

Les phénomènes de transport d'un point de vue phénoménologique

2. La diffusion moléculaire : les lois de Fick 95
2.1. L'équation de continuité 95
2.2. Les lois de Fick 97
2.3. Exemple de résolution de l'équation de diffusion en régime stationnaire 98
2.4. Application à la mesure de la section moyenne des pores d'une membrane 98
2.5. Exemple de résolution en régime non stationnaire 99

3. La conduction thermique : la loi de Fourier 100
3.1. La loi de Fourier et l'équation de la chaleur 100
3.2. Exemple de résolution en régime stationnaire 102
3.3. Exemple de résolution en régime non stationnaire 102

4. La viscosité 103

5. La conduction électrique : la loi d'Ohm 104

Les phénomènes de transport d'un point de vue microscopique

6. Section efficace et libre parcours moyen 106
6.1. Notion de section efficace 106
6.2. Notion de libre parcours moyen 107

7. Théorie cinétique élémentaire des phénomènes de transport 108
7.1. Le modèle moléculaire 108
7.2. La théorie élémentaire des phénomènes de transport 109
7.3. La définition moléculaire des coefficients de transport 111
7.4. Propriétés des coefficients de transport 111

8. Théorie cinétique élémentaire de la conductivité électrique 112

9. Diffusion et mobilité : la relation d'Einstein 113

Chapitre 8. Propagation des ondes et phénomènes vibratoires 115

Les ondes de propagation

1. Introduction 115

2. Description mathématique de la propagation d'un ébranlement 116

3. L'équation différentielle d'un ébranlement de propagation 117

4. Les propriétés d'une onde harmonique (ou sinusoïdale) de propagation 118

5. Ondes de propagation 121

6. Ondes de propagation à deux et trois dimensions 122
6.1. Polarisation d'une onde de propagation 123
6.2. Notion de surface d'onde 123
6.3. Intensité d'une onde de propagation 126
6.4. Isotropie et anisotropie des milieux de propagation 127

7. Le principe et la construction d'Huyghens 127

8. L'effet Doppler 129
8.1. Principe de l'effet Doppler 129
8.2. La spermovélocimétrie par effet Doppler 130

Les phénomènes vibratoires

9. La composition des ondes harmoniques de propagation 131

10. Interférence de deux ondes harmoniques, de même état de polarisation et de même fréquence 133
10.1. Ondes ayant la même direction de propagation 133
10.2. Interférences spatiales 136
10.3. Ondes stationnaires unidimensionnelles 140

11. Battement de deux ondes harmoniques, de même état de polarisation, de même direction de propagation et de fréquences différentes 143

Chapitre 9. Les ondes électromagnétiques et la lumière polarisée 146

Généralités sur les ondes électromagnétiques

1. La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide 146

2. Propagation dans un milieu matériel. Indice de réfraction absolu 149

3. Notion de chemin optique 150
3.1. Définition 150
3.2. Application aux lames de phase 151

4. Notion de rayons lumineux 152

5. Dualité onde-corpuscule 153

6. Le spectre du rayonnement électromagnétique 154

La lumière polarisée

7. Polarisations linéaire, elliptique et circulaire 155

8. Lumière naturelle et lumière partiellement polarisée 158

9. Dichroïsme 159

10. Biréfringence 160

Chapitre 10. Éléments d'optique géométrique. Systèmes optiques 162

Éléments d'optique géométrique

1. Réflexion et réfraction des ondes planes 162
1.1. Les lois de Descartes 162
1.2. Discussion des lois de Descartes : la réflexion totale 165

2. Définitions propres à l'optique géométrique 166
2.1. Système optique 166
2.2. Image d'un point lumineux 166
2.3. Point lumineux virtuel 167

3. Miroir plan 168

4. Miroirs sphériques 169

5. Réfraction par un dioptre sphérique 173

6. Lentilles minces 176

Quelques exemples de systèmes optiques

7. La loupe 179

8. Le microscope 181

9. Microscope à contraste de phase 182
9.1. Principe du contraste de phase 182
9.2. Réalisation pratique 184

10. Microscope interférentiel à deux ondes 184
10.1. Principe d'un interféromètre à deux ondes 184
10.2. Microscope interférentiel à deux ondes 185

Chapitre 11. Introduction aux phénomènes de diffraction 186

1. Origine des phénomènes de diffraction 186

2. Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire étroite et très longue 188

3. Diffraction à l'infini par une pupille circulaire 192

4. Réseaux de diffraction 194
4.1. Interférence de N sources synchrones, distantes de a et d'intensité i 195
4.2. Réseau de diffraction par transmission éclairé en incidence normale 196
4.3. Propriétés des réseaux 198

Annexe mathématique 201

1. Formulaire de trigonométrie 201
1.1. Définitions des fonctions trigonométriques 201
1.2. Relations entre les fonctions trigonométriques d'un angle x 202
1.3. Fonctions trigonométriques de quelques angles 203
1.4. Relations entre les fonctions trigonométriques de certains angles liés par une relation simple 203
1.5. Formules pour l'addition et la soustraction des angles 204
1.6. Formules de la division des angles 204
1.7. Transformations trigonométriques 204

2. Exponentielles et logarithmes 204
2.1. Définition de e 204
2.2. Définitions des fonctions hyperboliques 205
2.3. Logarithmes 206

3. Série de Taylor et développements limités 207

4. Dérivées et primitives de fonctions usuelles 208

5. Intégrale définie sur (a, b) 209

6. Dérivées partielles 209

7. Différentielle et forme différentielle d'une fonction de plusieurs variables 210
7.1. Différentielle 210
7.2. Forme différentielle 210
7.3. Relations entre les dérivées partielles d'une fonction f(x, y, z) de trois variables 211